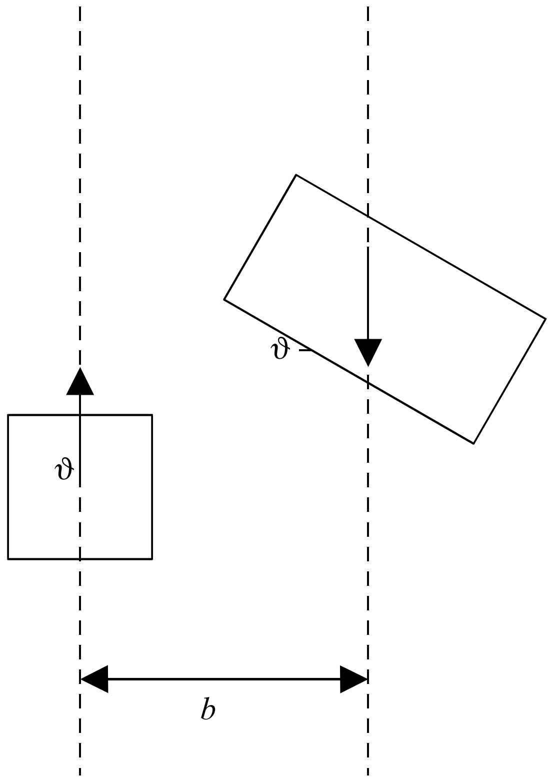
XLII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Doskonale sprężyste zderzenia klocków"

Po płaskim poziomym stole ślizgają się bez tarcia dwa różne płaskie klocki o jednakowych masach *m.* Początkowo klocki przemieszczają się ruchem postępowym (bez obrotów) tak, że ich środki mas poruszają się z jednakowymi prędkościami u po równoległych liniach prostych. Odległość między tymi prostymi wynosi d. Rycina 1 przedstawia jedną z możliwych konfiguracji klocków.



Ryc. 1

W pewnym momencie następuje doskonale sprężyste zderzenie klocków. Po zderzeniu klocki wykonują ruch postępowy obrotowy nadal ślizgając się po powierzchni stołu. Prędkość kątowa pierwszego klocka wynosi ω_1, zaś prędkość kątowa drugiego wynosi ω_2. Momenty bezwzględności klocków względem osi pionowych przechodzących przez środki mas klocków wynoszą odpowiednio I_1 i I_2.

1) Wykaż, że moment pędu klocka względem dowolnego, ustalonego punktu stołu jest równy sumie momentu pędu środka masy klocka względem tego punktu oraz momentu pędu klocka względem jego środka masy.

2) Oblicz odległości d' między prostymi, po których poruszają się środki mas klocków po zderzeniu.

3) Przyjmując, że po zderzeniu wartości prędkości pierwszego klocka wynosi $\upsilon/^{p}$ 2. zaś drugi klocek nie wykonuje obrotów, podaj i zinterpretuj (naszkicuj) zależność d' od d.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

1) Niech r_i i r'_i oznaczają odpowiednio wektory wodzące punktów materialnych o masach m_i w układzie związanym ze stołem i w nieobracającym się układzie środka masy klocka. Wtedy $r_i = R+r'_i$ i $\upsilon_i = V+\upsilon'_i$, gdzie $\upsilon_i = dr_i/dt$ i $\upsilon'_i = dr'_i/dt$, zaś wektory R i V odnoszą się do środka masy. Moment pędu wyraża się wzorem

$$J = \sum_i m_i r_i \times \upsilon_i = \sum_i m_i R \times V + \sum_i m_i r'_i \times V + \sum_i m_i R \times \upsilon'_i + \sum_i m_i r'_i \times \upsilon'_i = MR \times V + I\omega, \tag{1}$$

Gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\sum_i m_i r'_i = 0 \qquad \text{(środek masy)}$$

I jej pochodnej

$$(d/dt)\sum_i m_i r'_i = \sum_i m_i \upsilon'_i = 0.$$

$$\sum_i m_i = M$$ jest całkowitą masą klocka, zaś

I – jego momentem bezwładności względem przechodzącej przez środek masy osi obrotu, określonej przez prostopadły do powierzchni stołu wektor prędkości kątowej ω. Ponieważ wektory r' i υ' są wzajemnie prostopadłe i oba leżą w płaszczyźnie stołu, ich iloczyn wektorowy $r' \times \upsilon'_i$ jest skierowany zgodnie z ω. Wartość prędkości $\upsilon'_i = |\omega| r'_i$, zatem

$$\sum_i m_i r'_i \times \upsilon'_i = \sum_i m_i r'^2_i \vec{\omega} = I\vec{\omega}. \tag{2}$$

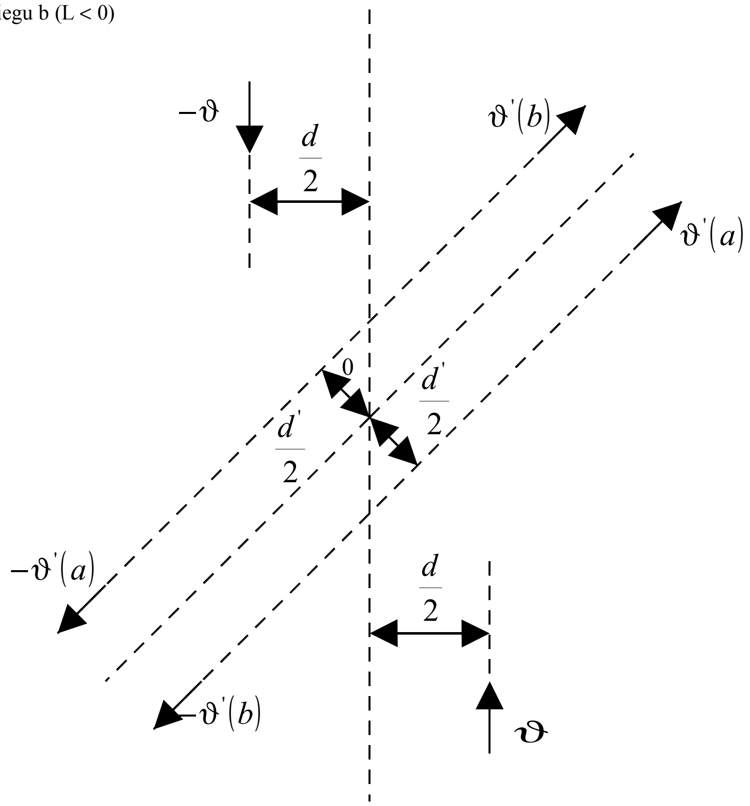
2) Po zderzeniu prędkości klocków będą jednakowe co do wartości, lecz przeciwnie skierowane, co wynika z zasady zachowania całkowitego pędu układu. Korzystając z zasady zachowania energii i momentu pędu układu dwóch klocków otrzymujemy równania

$$2\frac{m\upsilon^2}{2} = 2\frac{m\upsilon'^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}, \tag{3}$$

$$2m\upsilon\frac{d}{2} = \pm 2m\upsilon'\frac{d'}{2} + I_1\omega_1 + I_2\omega_2, \tag{4}$$

gdzie d' i υ' oznaczają odpowiednio odległość wzajemną torów i wartości prędkości klocków po zderzeniu. Prędkością kątowym $\omega < 0$ odpowiada obrót klocka w kierunku zgodnym, zaś prędkością $\omega > 0$ – obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (patrzymy z góry na klocek ślizgający się po stole). Orbitalny moment pędu układu klocków względem wspólnego środka masy *0*. L = ± $m\upsilon' d'$, jest dodatni lub ujemny, w zależności od obiegu punktu *0* przez oba klocki po zderzeniu, ryc. 2.

sposób obiegu a (L > 0)
sposób obiegu b (L < 0)



Ryc. 2

Z równań (3) i (4) wyznaczamy υ'

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon^2 - \frac{I_1\omega_1}{2m} - \frac{I_2\omega_2}{2m}} \tag{5}$$

oraz d'

$$d' = \left| \frac{m\upsilon d - I_1\omega_1 - I_2\omega_2}{m\upsilon'} \right|. \tag{6}$$

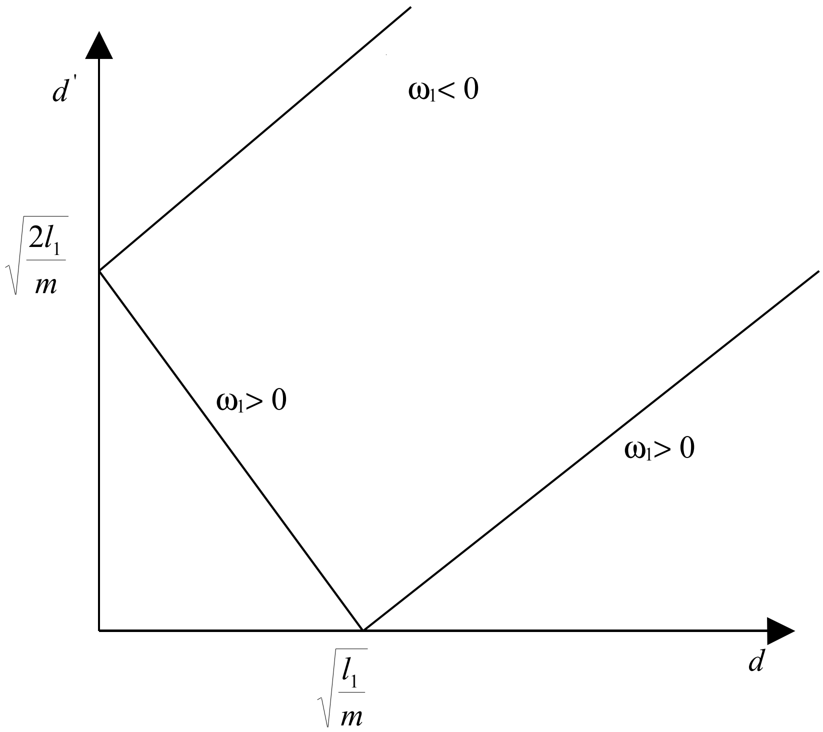
3) Ponieważ wartość prędkości obu klocków po zderzeniu wynosi $\upsilon' = \upsilon / \sqrt{2}$, zaś $\omega_2 = 0$, korzystając ze wzoru (3) otrzymujemy

$$\omega_1 = \pm\upsilon\sqrt{\frac{m}{I_1}}, \tag{7}$$

skąd po podstawieniu do (6) otrzymujemy

$$d' = \sqrt{2}\left|d - \frac{I_1\omega_1}{m\upsilon}\right| = \sqrt{2}\left|d \pm \sqrt{\frac{I_1}{m}}\right|. \tag{8}$$

Wykres zależności d' od d jest przedstawiony na rycinie 3.



Ryc. 3

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF"

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl