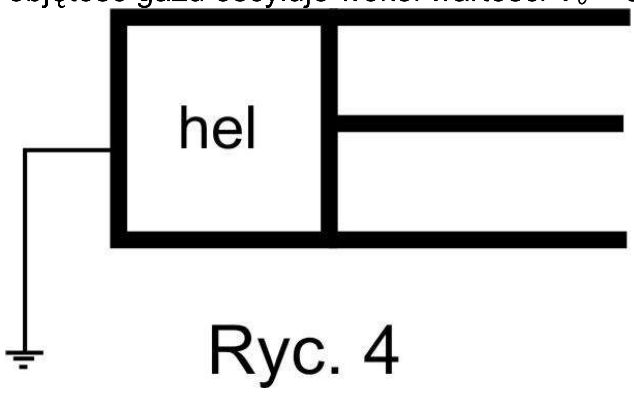
XLII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Naładowany tłok”

W nieprzewodzącym ciepła ani prądu cylindrze, umieszczonym w próżni, porusza się bez tarcia tłok o masie *m* = 5 g. Wewnątrz cylindra znajduje się gazowy hel o przenikalności elektrycznej $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, C^2 / \left(Nm^2\right)$.

Na zaznaczonych na ryc. 4 (grubą kreską) powierzchniach tłoka i dna cylindra znajdują się cienkie warstwy metalu. Dno cylindra jest uziemione. Tłok wykonuje małe drgania o okresie *T* = 0,3 s w małej (w porównaniu ze średnicą tłoka) odległości od dna cylindra, zaś objętość gazu oscyluje wokół wartości V_0 = 0,11.



Ryc. 4

Jaki ładunek elektryczny znajduje się na metalicznej powierzchni tłoka?

Uwaga! Dla $\Delta x^{\omega} 1$, $\left(1+\Delta x\right)^{\alpha} \approx 1+\alpha\Delta x$.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Ponieważ ruch tłoka jest powolny, możemy przyjąć, że zachodzi odwracalna przemiana adiabatyczna gazu, podczas której jest spełnione równanie

$$V_0^{\kappa} p_0 = V^{\kappa} p \tag{1}$$

gdzie $\kappa = C_p / C_v$ dla helu jest równe $\kappa = 5/3$. Jeżeli przez S oznaczymy powierzchnię przekroju tłoka, to siła nań działająca wynosi

$$F = pS - \frac{Q\sigma}{2\varepsilon} = pS - \frac{Q^2}{2S\varepsilon} + \left(p - p_0\right)S \tag{2}$$

gdzie p jest ciśnieniem helu, zaś

$$p_0 = \frac{Q^2}{2S^2\varepsilon} \tag{3}$$

odpowiada równowadze sił parcia gazu na tłok i siły elektrostatycznej. Ładunek Q rozmieszczony na tłoku indukuje ładunek -Q na dnie cylindra. Ponieważ odległość między tłokiem a dnem cylindra jest mała w porównaniu z rozmiarami tłoka, możemy traktować układ jak kondensator płaski, którego jedna okładka znajduje się w polu drugiej okładki $E = \sigma/2\varepsilon$, gdzie $\sigma = Q/S$ jest gęstością powierzchniową ładunku. Oznaczmy przez *x* i x_0 ($Sx_0 = V_0$) chwilową i średnią odległość tłoka od dna cylindra. Korzystając z równania (1) obliczamy

$$p - p_0 = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa} p_0 - p_0 = p_0\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\kappa} - 1\right] =$$

$$= p_0\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{-\kappa} - 1\right] \approx \frac{\kappa p_0}{x_0 \Delta x} \qquad (4)$$

gdzie $\Delta x = x - x_0$. Korzystając z (2) i (4) możemy napisać równanie ruchu dla tłoka o masie m, $md^2x/dt^2 = md^2(\Delta x)/dt^2 = F$ w postaci

$$m\frac{d^2\Delta x}{dt^2} = -\frac{S\kappa p_0}{x_0}\Delta x \qquad (5)$$

Równanie (5) opisuje ruch harmoniczny tłoka, którego położenie oscyluje wokół x_0 z okresem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx_0}{S\kappa p_0}} \qquad (6)$$

Podstawiając p_0 (3) do równania (6) otrzymujemy ostatecznie

$$Q = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{6}{5}mV_0\varepsilon} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-8}\ C \qquad (7)$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl