XLI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadanie teoretyczne

Rozwiąż dowolnie przez siebie wybrane dwa spośród podanych niżej zadań:

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Protony i antyprotony”

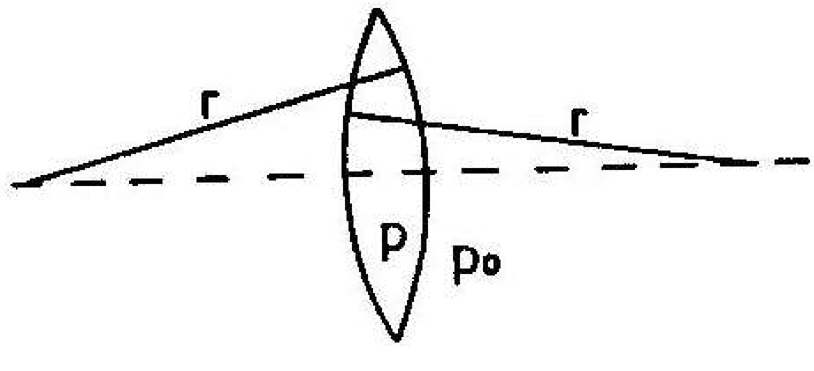
A. Cząstki o masie równej masie protonu, ale o przeciwnym ładunku zwane są antyprotonami (p).Swobodne antyprotony można otrzymywać podczas zderzeń protonów z protonami zgodnie z reakcją: $p + p \to p + p + p + \bar{p}$. Reakcję tę można zrealizować m.in. przez bombardowanie spoczywających, praktycznie swobodnych protonów, np. jąder wodoru zawartych w materiale tarczy wiązką wysokoenergetycznych protonów z akceleratora. Wykaż, że prędkość antyprotonu powstającego w rozważanej reakcji jest największa, gdy wszystkie powstałe cząstki poruszają się w tym samym kierunku co wiązka padająca, przy czym trzy protony biegną razem(spoczywają względem siebie), a antyproton biegnie osobno.

Nazwa zadania: „Soczewka wypełniona helem”

B. Między dwie cienkie, elastyczne błony wtłoczono hel. Ciśnienie helu wewnątrz tak otrzymanej cienkiej soczewki wynosi $p = \frac{3}{2} p_0$ ($p_0 = 1$atm), podczas gdy temperatura jest taka sama jak temperatura otaczającego go powietrza i wynosi $27^o C$ .Promienie krzywizny dwóch membran są identyczne i wynoszą $r = 20$m(rys1).

Wiedząc, że prędkość dźwięku w gazie wyraża się wzorem $v = [[C_P / C_V](p/\rho)]^{1/2}$, gdzie C_P i C_V oznaczają odpowiednio molowe ciepło właściwe gazu pod stałym ciśnieniem i w stałej objętości, zaś p i ρ oznaczają ciśnienie i gęstość gazu, wyznacz ogniskową soczewki

rys.1



dla fal dźwiękowych znając prędkość dźwięku w powietrzu o temperaturze $0^o C$ równą c = 331,3 m/s. Przyjmij, że hel i powietrze są gazami doskonałymi.

Nazwa zadania: „Sprężyna na szprysze"

C. Na szprychę o długości $2R$ nawleczono sprężynę o współczynniku sprężystości, której końce po rozciągnięciu przymocowano do końców szprychy. W odległości $\frac{1}{2}R$ od środka szprychy przymocowano do napiętej sprężyny punktową masę m. Następnie układ wprawiono w ruch, tak że obraca się on ze stałą częstością kątową ω_0 wokół ustalonej, prostopadłej do szprychy i przechodzącej przez jej środek osi. Jaka relacja powinna zachodzić między ω_0, k i m, aby masa m mogła wykonywać drgania względem szprychy, o amplitudzie $\frac{1}{2}R$, nie osiągając przy tym końców szprychy? Podaj wzór na częstość tych drgań? **UWAGA!** Przyjmij, że masa i długość nienapiętej sprężyny oraz siły tarcia są zaniedbywalnie małe.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

A. W układzie SM (środka masy dwóch zderzających się protonów) oznaczamy całkowitą energię przez W, pędy protonów przez $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3,$ ich energię przez $E_1, E_2, E_3,$ a pęd antyprotonu przez $\vec{p}$ .Oznaczamy przez masę *m* masę każdej z cząsteczek oraz przyjmijmy dla uproszczenia, że prędkość światła c = 1. Ponieważ $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, mamy

$$W = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2} + E_1 + E_2 + E_3 =$$

$$(m^2 + \vec{p}^2)^{1/2} + \left[\left(E_1 + E_2 + E_3\right)^2 + \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right)^2 + p^2\right]^{1/2} \quad , \qquad (1)$$

co po przeniesieniu pierwszego pierwiastka na lewą stronę i podniesieniu obu stron do kwadratu daje równość:

$$2W(m^2 + \vec{p}^2)^{1/2} = W^2 + m^2 - \left[\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2\right] \quad , \qquad (2)$$

Gdzie przez $\sum$ oznaczono sumowanie po wskaźnikach przebiegających wartości 1, 2, 3. Zatem przy ustalonej wartości energii W pęd antyprotonu $\vec{p}$ będzie miał największą wartość, gdy wartość wyrażenia $\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2$ będzie mniejsza. Wykażemy, że absolutne minimum tego wyrażenia wynosi $9m^2$ i jest osiągane, gdy $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3$.

Dowód:

$$\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2 = \sum\left(E_i^2 - \vec{p}_i\right) + 2\sum_{i>j}\left(E_i E_2 - \vec{p}_i \vec{p}_j\right) = 3m^2 + 2\sum_{i>j}\left(E_i E_2 - \vec{p}_i \vec{p}_j\right)$$

(3) ale

$$\vec{p}_i^{\,2} \vec{p}_j^{\,2} \geq \left(\vec{p}_i \vec{p}_j\right)^2 \quad , \qquad (4)$$

gdyż $\cos^2\alpha \leq 1$, oraz

$$\vec{p}_i^{\,2} + \vec{p}_j^{\,2} \geq 2\vec{p}_i \vec{p}_j \qquad (5)$$

Mnożąc (5) przez m^2 i dodając stronami do (4) otrzymujemy

$$\vec{p}_i^{\,2}\vec{p}_j^{\,2} + m^2(\vec{p}_i^{\,2} + \vec{p}_j^{\,2}) + m^4 \geq \left(\vec{p}_i\vec{p}_j\right)^2 + 2m^2\vec{p}_i\vec{p} + m^4$$

co można zapisać w postaci

$$(m^2 + \vec{p}_i^{\,2})(m^2 + \vec{p}_j^{\,2}) \geq (m^2 + \vec{p}_i\vec{p}_j)^2 \quad ,$$

lub po wyciągnięciu pierwiastków z obu stron,

$$E_iE_j \geq m^2 + \vec{p}_i\vec{p}_j$$

Jeżeli w układzie SM trzy protony spoczywają względem siebie, to również w układzie laboratoryjnym są we względnym spoczynku. Antyproton ma największą prędkość względem laboratorium, gdy jego prędkość w układzie SM jest skierowana zgodnie z kierunkiem padania wiązki protonów.
Dotąd nie o energii działania elektrycznego cząstek. Zwróćmy jednak uwagę, że energia elektrostatyczna protonów oddalonych od siebie makroskopowo, powiedzmy o 1μm , jest zaniedbywana w stosunku do ich energii całkowitej.

B. Współczynnik załamania fal dźwiękowych na powierzchni oddzielającej hel od powietrza można wyrazić przez stosunek prędkości dźwięku w tych ośrodkach $n = v_{pow}/v_{hel}$. Stosunek p/ρ dla gazu doskonałego wynosi $p/\rho = RT/\mu$, gdzie μ jest masą molowa gazu i w przypadku mieszaniny gazów μ jest pewną średnią masą molowa), T – jego temperaturą, a R jest stałą gazową($R = 8.31 J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$). Współczynnik załamania n , jako stosunek prędkości fal w gazach w przypadku równych temperatur nie zależy od temperatury gazów. Możemy go zatem wyznaczyć w temperaturze 0^0C , dla której prędkość dźwięku w powietrzu jest podana:

$$n = c/(\kappa_{hel}RT_0/\mu_{hel})^{1/2}$$

gdzie T_0 = 273K. W celu obliczenia odległości ogniskowej f soczewki o jednakowych powierzchniach sferycznych korzystamy ze wzoru $f = \mathrm{r}/[2(n-1)]$. Przyjmując $\kappa_{hel} = 5/3$ otrzymujemy

$$f = 10\mathrm{m}/\{331{,}3/[5/3\cdot 8{,}31\cdot 273\cdot (4{,}003)^{-1}] - 1\}$$

C. Masa m przyłączona do nieruchomej, napiętej sprężyny wyznacza jej podział na dwie części o długościach $\frac{5}{4}R$ i $\frac{3}{4}R$. Każda z tych części napięta jest siłą równą sile napięcia całej sprężyny, a więc odpowiadające tym częściom współczynniki sprężystości spełniają równość.

$$\frac{5}{4}Rk' = \frac{3}{4}Rk'' = 2RK \qquad (1)$$

Mamy więc $k' = \frac{8}{5}k$ oraz $k'' = \frac{8}{3}k$. W układzie związanym z obracającą się szprychą siła działająca na masę *m* oddalona o *x* od osi obrotu wynosi (rys.1)

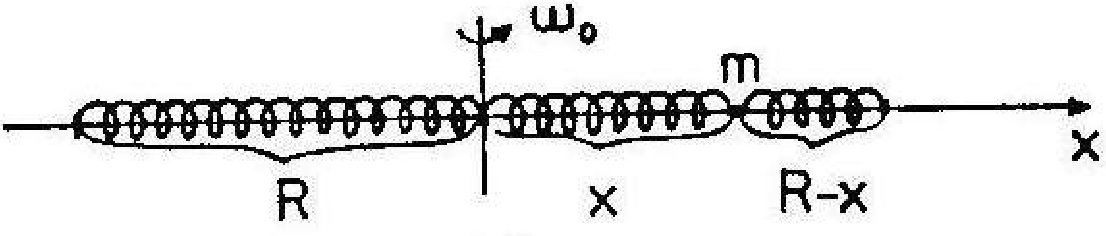
$$F(x) = m\omega_0^2 x + k''(R-x) - k'(R+x) \qquad (2)$$

Położenie równowagi masy *m* względem szprychy wyznaczone z warunku F(x) = 0 wynosi

$$x_0 = \frac{16/15kR}{64/15k - m\omega_0^2} \tag{3}$$

Możemy zatem napisać

$$F(x_0 + \Delta x) = m\omega^2{}_0\Delta x + (k'+k'')\Delta x = -[\frac{64}{15}k - m\omega^2{}_0]\Delta x \tag{4}$$



rys. 1

co oznacza, ze ruch masy *m* względem szprychy jest harmoniczny i odbywa się z częstością

$$\omega = (\frac{64}{15}\frac{k}{m} - \omega_0^2)^{1/2} \quad , \tag{5}$$

o ile tylko argument pierwiastka jest liczba dodatnią. Z warunku $R/2 < R - x_0$, który zapewnia wymagane ograniczenia ruchu, otrzymujemy

$$\omega_0^2 < \frac{32}{15}\frac{k}{m} \quad . \tag{6}$$

Dla częstości ω_0 spełniających nierówność (6) argument pierwiastka we wzorze (5) jest dodatni.

Punktacja: (41OF_W_T1)

Zad. 1A (0 - 6 pkt):

- ✓ Wyznaczenie równania całkowitej energii antyprotonu (równanie (1)):0 – 2 pkt;
- ✓ Wyznaczenie równania (8): 0 - 4 pkt;

Zad. 1B (0 - 5 pkt):

- ✓ Skorzystanie z zależności $n = v_{pow}/v_{hel}$:0 – 1;
- ✓ Wyznaczenie n: 0 – 2 pkt;
- ✓ Wyznaczenie ogniskowej f :0 – 2 pkt;

Zad. 1C (0 – 6 pkt):

- ✓ Wyznaczenie równania współczynników sprężystości (rów. (1)):0 -1 pkt;
- ✓ Wyznaczenie równania siły F(x) :0 – 2 pkt;
- ✓ Wyznaczenie położenia równowagi: 0 – 1 pkt;
- ✓ Wyznaczenie równania (6):0 – 2 pkt.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl