XLI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Balon mający kształt kuli zwiększa swój promień 2 razy"

Wewnątrz zamkniętego balonu znajduje się gaz pod ciśnieniem p=(4/3)p_0, gdzie p_0 jest ciśnieniem gazu na zewnątrz balonu. Elastyczna, przewodząca powloką tego balonu pod wpływem sil działających na jej powierzchnię przyjmuje kształt kuli. Jakim ładunkiem należy naelektryzować powlokę, aby promień balonu zwiększył się dwukrotnie?

W interesującym nas zakresie rozmiarów balonu spełniony jest związek $r(\Delta p)^2 = A = const.$, gdzie *r* jest promieniem balonu, a Δp wartością wypadkowej siły działającej na jednostkę pola powierzchni jego powłoki.

Dane: p_0, A, przenikalność dielektryczna gazu jest równa przenikalności dielektrycznej próżni ε_0.

Uwaga! Przyjmij, że w czasie powolnego elektryzowania powłoki gaz zachowuje się jak doskonały oraz że temperatury gazu wewnątrz i na zewnątrz balonu są równe i stałe.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Określimy najpierw związek między całkowitym ładunkiem Q umieszczonym na przewodzącej powłoce balonu, a siłą δ p, jaka działa na jednostkowy element powierzchni tej powłok. Na powierzchni kuli przewodzącej o promieniu *r* rozkład ładunku jest jednorodny, a energia potencjalna takiego rozkładu ładunków wynosi

$$U = Q^2 / 8\pi\varepsilon_0 r. \qquad (1)$$

Przyrost energii potencjalnej związany z bardzo małą zmianą Δr promienia *r* jest równy

$$\Delta U = (dU / dr) / \Delta r = -\left(Q^2 / 8\pi\varepsilon_0 r^2\right)\Delta r. \qquad (2)$$

natomiast praca sił elektrycznych potrzebna do zwiększenia promienia *r* o Δr wynosi

$$\Delta L = 4\pi r^2 \delta p \Delta r. \qquad (3)$$

Z zasady zachowania energii mam ΔU+ΔL=0, zatem związek między *Q, r* i Δp jest następujący[1]:

$$Q^2 = 32\pi^2 \varepsilon_0 r^4 \delta p. \qquad (4)$$

Oznaczmy przez r_1 i r_2 ($2r_1 = r_2$) promienie balonu odpowiednio przed i po naelektryzowaniu jego powłoki. Ciśnienie końcowe gazu wewnątrz balonu *p*\` obliczamy korzystając z równania pV= const ( $pr_1^3 = p\`r_2^3$) skąd mamy

$$p\`= \frac{1}{8} p \qquad (5)$$

Uwzględniając równość *p* = (4/3)/P_0 otrzymujemy równania

$$r_1 = A / (p - p_0)^2 = 9A / P_0^2 \qquad (6)$$

[1] W.Gorzkowski, 25 lat Olimpiad Fizycznych (zadanie 19, str.275)

$$r_2 = A/\left(p` + \delta p - p_0\right)^2 = A/\left(\delta p - \frac{5}{6}p_0\right)^2. \tag{7}$$

Korzystając z warunku $2r_1 = r_2$, oraz z powyższych wzorów (6) i (7) otrzymujemy równanie

$$\pm\sqrt{2}\left(\delta p - \frac{5}{6}p_0\right) = \frac{1}{3}p_0 \tag{8}$$

(równanie ze znakiem " —" przed pierwiastkiem odrzucamy gdyż powłoka balonu jest napięta wtedy, gdy spełniona jest nierówność $\delta p - \frac{5}{6}p_0 > 0$) z którego wynika

$$\delta p = \frac{5+\sqrt{2}}{6}p_0. \tag{9}$$

Podstawiając do wzoru (4) otrzymaną wartość Δp (9) oraz, $r = r_2 = 2r_1$ z r_1 obliczonym według wzoru (6) otrzymujemy ostatecznie

$$Q^2 = 2^8 \cdot 3^7 \cdot \left(5+\sqrt{2}\right)\pi^2 \varepsilon_0 A^4 / p_0^7. \tag{10}$$

Punktacja

Związek ciśnienia δp
z ładunkiem Q (4) max
4 pkt

Wyznaczenie δp z równania
materiałowego i prawa
gazowego (9) max 3 pkt

Wzór końcowy (10) max 3 pkt

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w szkole" 93r.

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl