

XLI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

Zadanie doświadczalne

ZADANIE D1

Pod działaniem sił zewnętrznych ciała stale ulegają odkształceniom. Wyznacz zależność promienia r obszaru styczności szklanej soczewki z płytka szklana od obciążenia soczewki. Zauważ, że odkształceniom ulega zarówno soczewka jak i płytka, gdyż są one wykonane z materiału o tej samej twardości.

Możesz korzystać z następujących przedmiotów:

PRZYRZĄDY

1. Plasko wypukła soczewka szklana o znanej masie m_0 i promieniu krzywizny R
2. Płytkaszklana
3. 10 Jednakowych ciężarków w kształcie krążków o znanej masie m_1 (ok.25g)
4. Smar do sklejanie ciężarków o znanej masie ze sobą
5. Stoper
6. Kontomierz
7. Linijka z podziałką milimetrowa
8. Papier milimetrowy
9. Kredka woskowa lub flamaster piszący na szkle

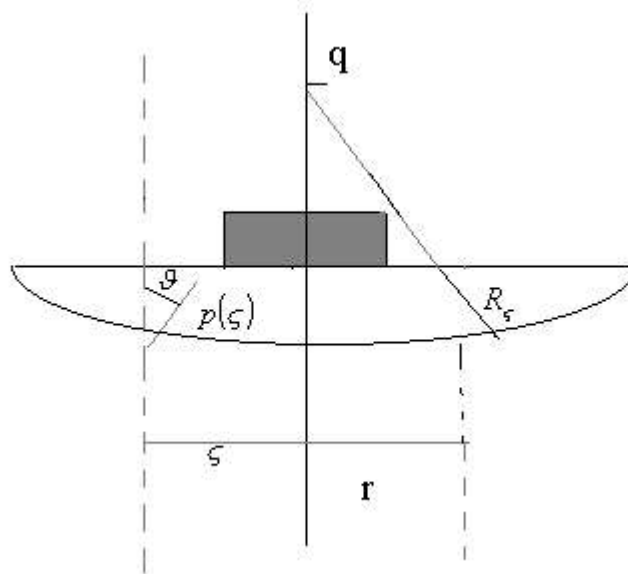
WSKAZOWKA

1. Przyjmij, że dla małej całkowitej siły nacisku więc dla małych odkształceń, ciśnienie w punkcie styczności jest kwadratowa funkcja odległości tego punktu od osi symetrii soczewki
2. Przeanalizuj związek momentu siły tarcia przy obrocie soczewki siły nacisku, zauważając, że $r \ll R$.
3. Przyjmij, że dla użytych w doświadczeniu materiałów współczynnik tarcia kinetycznego jest praktycznie równy współczynnikowi tarcia statycznego.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Część teoretyczna:

Znalezienie kształtu soczewki w zależności od całkowitej siły nacisku jest bardzo skomplikowane. Analizując związek momentu siły tarcia przy obrocie soczewki i siły nacisku można wyznaczyć promień obszaru styczności soczewki i płytki. W warunkach zdefiniowanych w zadaniu wystarczy zauważyć, że R_ζ (promień krzywizny soczewki w obszarze styczności) jest znacznie większy od promienia obszaru styczności (rys)



Rys.3

Korzystając ze wskazówki zakładamy, że ciśnienie $p(\zeta)$ w punkcie styczności obu powierzchni odległym o ζ od osi symetrii soczewki

$$p(\zeta) = A + B\zeta^2 \quad (1)$$

Z warunku brzegowego : dla $\zeta=r$ $p(r)=0$, gdzie r jest odległością granicy styczności od osi symetrii soczewki .Stąd

$$p(\zeta) = -Br^2 \left(\frac{1-\zeta^2}{r^2} \right) \quad (2)$$

Siła nacisku działająca na element E obszaru styczności (rys.2) o powierzchni $dS = \zeta \left(\frac{d\zeta}{\cos\vartheta} \right) d\phi$ wynosi

$$dN = p(\zeta) \zeta \left(\frac{d\zeta}{\cos\vartheta} \right) d\phi \cos\vartheta = p(\zeta) \zeta d\zeta d\phi$$

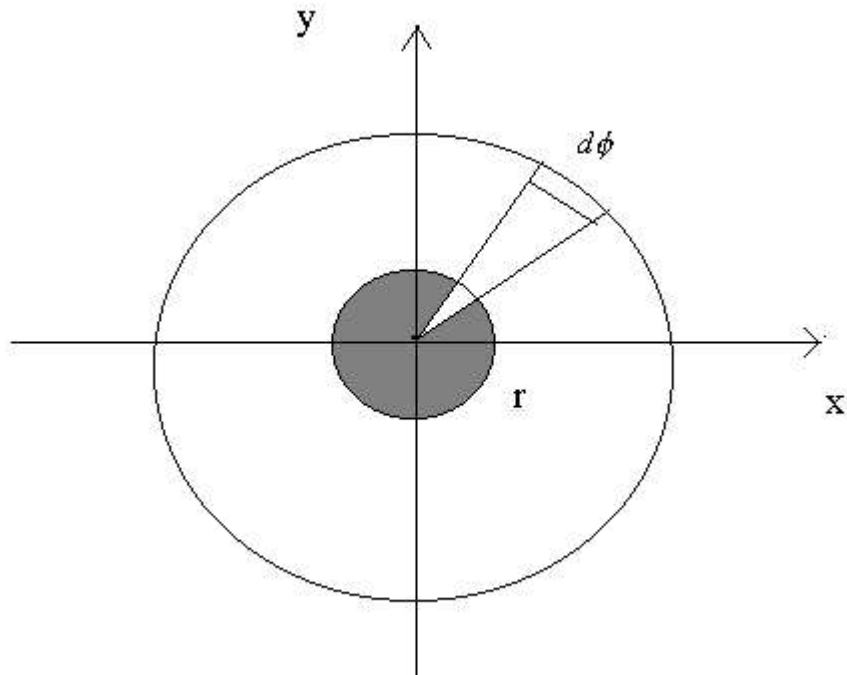
gdzie kąt ϑ jest kątem jaki tworzy normalna do odkształconej powierzchni z pionem.
Całkowita siła nacisku:

$$N = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r d\zeta \zeta p(\zeta) = 2\pi \int_0^r d\zeta \zeta p(\zeta)$$

Podstawiając wyrażenie (2) otrzymujemy:

$$N = -2\pi Br^2 \int_0^r \left(\frac{1-\zeta^2}{r^2} \right) \zeta d\zeta = -2\pi Br^2 \left[\int_0^r \zeta d\zeta - \frac{1}{r^2} \int_0^r \zeta^3 d\zeta \right]$$

$$N = \frac{-2\pi Br^4}{4} \quad (3)$$



Rys.4

Siła tarcia działająca na element E przy obrocie soczewki jest proporcjonalna do składowej siły nacisku normalnej do powierzchni wynosi

$$dT = \frac{\mu dN}{\cos\vartheta}$$

Moment siły tarcia działający na element E przy obrocie soczewki wokół osi symetrii wynosi

$$dM_T = \zeta dT = \mu p(\zeta) \zeta^2 d\zeta d\phi$$

Moment siły tarcia przy obrocie soczewki wokół osi symetrii wynosi:

$$M_T = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r d\zeta \zeta^2 p(\zeta) = 2\pi \mu \int_0^r d\zeta \zeta^2 p(\zeta)$$

$$M_T = \frac{-4\pi\mu Br^5}{15} \quad (4)$$

Możemy wyeliminować stałą B dzieląc równanie (4) i(3) stronami

$$\frac{M_T}{N} = \frac{8\mu r}{15} \quad (5)$$

Stąd:

$$r = \frac{15M_T}{8\mu N} \quad (6)$$

Całkowity moment siły tarcia można wyznaczyć badając ruch obrotowy soczewki względem jej osi symetrii. Równanie ruchu soczewki ma postać:

$$I \varepsilon = - M_T,$$

Gdzie I oznacza całkowity moment bezwładności względem osi symetrii soczewki, ε - przyspieszenie kątowe, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, ω - prędkość kątowa. Stąd $\omega(t) = \omega_0 - \frac{M_T t}{I}$, a kąt obrotu:

$$\alpha(t) = \omega_0 t - \frac{M_T t^2}{2I}$$

W momencie zatrzymania się soczewki po czasie t_{zn} . skutek hamującego działania siły tarcia prędkość kątowa $\omega(t) = 0$, a więc prędkość początkowa $\omega_0 = \frac{-M_T t}{I}$ i kąt wykonanego obrotu

$$\alpha = \frac{M_T t^2}{2I} \quad (7)$$

Stąd $\frac{M_T}{2I} = \frac{\alpha}{t^2}$ Nadając soczewce różne początkowe prędkości kątowe ω_0 i mierząc odpowiadające im α i t w chwili zatrzymania się soczewki możemy wyznaczyć całkowity moment siły tarcia $M_T = \frac{2I\alpha}{t^2}$ Jeżeli wykonamy takie pomiary przy różnych obciążeniach soczewki kładąc na niej od 0 do n ciężarków to będziemy mogli wyznaczyć $M_T(n)$ lub $\xi(n) = \frac{\alpha(n)}{[t(n)]^2} = \frac{M_T(n)}{2I(n)}$

Całkowity moment bezwładności $I(n)$ jest sumą momentów bezwładności soczewki I_0 i ciężarków zwiększających siłę nacisku soczewki na płytkę. Dla n ciężarków

$I(n) = I_0 + \frac{nm_1 a^2}{2}$, gdzie a oznacza promień ciężarka m_1 jego masę. Siła nacisku

$N(n) = (m_0 + nm_1)g$. Masa soczewki m_0 jest znana a jej moment bezwładności

obliczamy według. Wzoru $I_0 = m_0 R^2 \left(\frac{20b - 15b^2 + 3b^3}{10(3-b)} \right)$, gdzie R oznacza promień

krzywizny soczewki, $b = \frac{D}{R}$, D - grubość soczewki.

Ostatecznie :

$$r(n) = 15\xi(n) \frac{I_0 + nm_1 a^2}{2 [(m_0 + nm_1)g \cdot 4\mu]} \quad (8)$$

Zgodnie z założeniem przyjętym w treści zadania współczynnik tarcia kinetycznego μ można przyjąć za równy współczynnikowi tarcia statycznego, które możemy łatwo wyznaczyć doświadczalnie.

Część doświadczalna:

W doświadczeniu użyto soczewki o promieniu krzywizny $R=65\text{mm}$ i masie $m_0=32\text{g}$. Jako ciężarki stosuje stalowe krążki o średnicy $2a=33\text{mm}$ masie $m_1=25\text{g}$ każdy. Obciążając soczewkę kilkoma ciężarkami sklejono je odrobiną smaru. Dla ułatwienia pomiaru kąta obrotu na kartce papieru milimetrowego narysowano używając kątomierza i linijki układ współrzędnych x, y i siatkę promieni wychodzących ze środka układu, przy czym kat pomiędzy kolejnymi promieniami wynosił 10° . Taka kartkę podłożono pod płytkę szklaną. Na płaskiej stronie soczewki narysowano 2 promienie przecinające się pod kątem prostym w punkcie przejścia przez soczewka osi symetrii oraz oznakowano jedno z ramion „krzyża”. Pozwoliło to ustawić soczewkę tak, aby jej oś obrotu pokrywała się ze środkiem układu współrzędnych, a dodatnie ramie „krzyża” pokrywało się np. z dodatnim kierunkiem osi x . Soczewkę wprawiono w ruch palcami i w momencie puszczenia jej drugą ręką włączono stoper, którym mierzono czas trwania ruchu do momentu samorzutnego zatrzymania się soczewki. Pomiar czasu trwania ruchu obrotowego do momentu zatrzymania się soczewki przeprowadzono wielokrotnie dla samej soczewki (ilość ciężarków $n=0$) oraz dla soczewki obciążonej n ciężarkami nadając soczewce różne początkowe prędkości obrotu. Ciężarki należy ustawić na soczewce tak, by ich oś symetrii pokrywała się z osią symetrii soczewki. Otrzymane pary wartości (α, t^2) dla każdego n odłożono na papierze milimetrowym. Punkty te dla danego n powinny układać się na linii prostej przechodzącej przez punkt $(\alpha=0, t^2=0)$. Dla każdego n przeprowadzono przez punkt doświadczalne linie proste i z ich nachylenia wyznaczono wielkość $\xi(n) = \alpha / t^2$. Wynik pomiaru przedstawiono w tabeli 1.

Tabela1.

n	$\frac{N(n)}{g}$ [g]	$\xi(n)$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	$r(n)$ [mm]
0	32	$0,068 \pm 0,018$	$0,029 \pm 0,098$
2	82	$0,114 \pm 0,023$	$0,043 \pm 0,089$
4	132	$0,140 \pm 0,022$	$0,051 \pm 0,008$
8	232	$0,200 \pm 0,053$	$0,072 \pm 0,019$
10	282	$0,232 \pm 0,095$	$0,083 \pm 0,034$

Następnie wyznaczono współczynnik tarcia statycznego materiału soczewki o płytkę szklaną, szukając najmniejszego kąta β , dla którego soczewka zaczyna się zsuwać z równi pochyłej utworzonej przez nachyloną pod kątem β płytkę szklaną. Otrzymano $\mu = \operatorname{tg}\beta = 0,15 \pm 0,02$. Korzystając ze wzoru (8) dla każdego n obliczono $r(n)$. Wartości $r(n)$ wraz z błędami odłożono na papierze milimetrowym w funkcji obciążenia $\frac{N(n)}{g}$.

OCENA BŁĘDÓW

Wielkości mierzone α i t obarczone są błędem pomiarowym związanym z dokładnością użytych do pomiaru przyrządów, $\Delta\alpha=0,006$ rad, $\Delta t=0,2$ s. Mogą wystąpić błędy systematyczne związane z opóźnieniem lub przyspieszeniem włączenia lub zatrzymania na początku i na końcu ruchu soczewki. Może wystąpić też nieosiowe umieszczenie ciężarków na soczewce oraz nadanie jej dodatkowo innego ruchu poza ruchem obrotowym.

PUNKTACJA:

Część teoretyczna 10 punktów i doświadczalna 10 punktów

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl