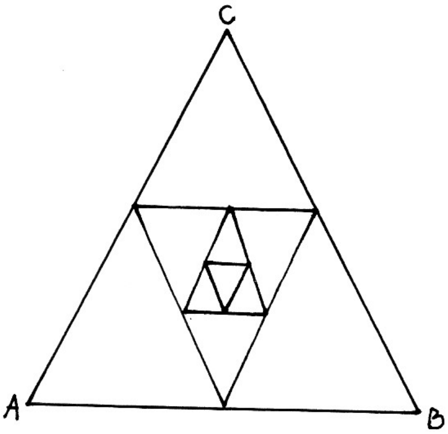
XL OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne.

ZADANIE T5

Nazwa zadania: „'Oporne' trójkąty",

Z jednorodnego drutu zbudowano opornik składający się z nieskończonego ciągu trójkątów równobocznych wpisanych kolejno jeden w drugi, jak na ryc. 1.

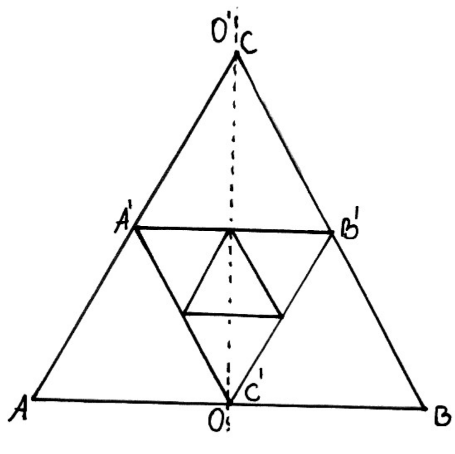


Ryc. 1.

Oblicz oporność R_{AB} między punktami *A* i *B,* jeżeli odcinek drutu tworzący bok największego trójkąta, np. *AB* ma opór $R = 1$ Ω.

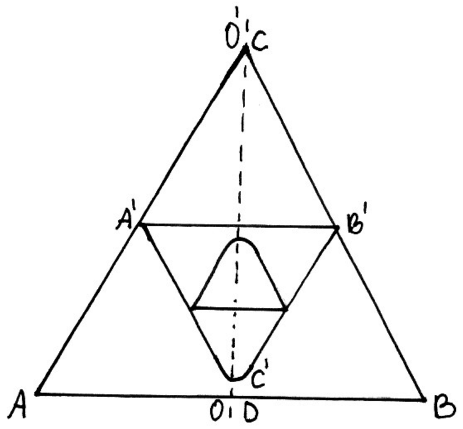
ROZWIĄZANIE ZADANIA T5

Opór wypadkowy R_{AB} jest liniową i jednorodną (R_{AB}=0 dla R= 0) funkcją oporu R, $R_{AB} = \alpha R$ gdzie α jest bezwymiarową wielkością zależną od geometrii połączeń oporów. W celu obliczenia R_{AB} zauważmy, że układ połączeń przedstawiony na ryc. 2 można zastąpić



Ryc. 2.

równoważnym układem z ryc. 3, w którym przerwano połączenia wierzchołków trójkątów z podstawami trójkątów opisanych, co wynika z symetrii względem osi 00’ układu połączeń przewodów.



Ryc. 3.

Dla zadanego napięcia U_{AB} różnica potencjałów $U_{DC'}$ między punktami D i C’ wynosi zero, gdyż zmiana znaku napięcia $U_{AB} \rightarrow - U_{AB}$ powoduje zmianę znaku $U_{DC'} \rightarrow - U_{DC'}$, ale z symetrii układu wynika, że $U_{DC'} \rightarrow - U_{DC'} = 0$.

Rozpatrzmy podukład nieskończony *A’ B’ C’*. Opór między punktami *A’ B’* tego podukładu wynosi $R_{A'B'} = \alpha\, R/2$. Możemy zatem ułożyć równanie na α korzystając jedynie z praw dodawania oporów łączonych szeregowo lub równolegle:

$$R_{AB} = \alpha R = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \left[1/R + 1/(\alpha R/2) \right]^{-1}} \right]^{-1}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $\alpha = \left(\sqrt{7} - 1\right)/3$, a wartość oporu R_{AB} wynosi

$$R_{AB} = \alpha R = 0.5486\ \Omega\ .$$

Punktacja.

W dostępnym źródle brak propozycji punktacji.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole” maj-czerwiec 1991

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl