

XL OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II

Zadania doświadczalne

ZADANIE D1

Przy skręcaniu drutu o mały kąt α moment skręcający sił sprężystości wyraża się wzorem:

$$M = -\pi GR^4 \alpha / (2L)$$

gdzie G oznacza moduł sztywności materiału z jakiego wykonano drut, R - promień drutu, L – długość drutu. Wyznacz doświadczalnie moduł sztywności drutu stalowego. Możesz korzystać z następujących przedmiotów:

- 1) drut stalowy o znanej średnicy $2R$,
- 2) uchwyt stołowy, pręt i łącznik
- 3) pręt połączony trwale z łącznikiem o znanej sumarycznej masie m ,
- 4) mocna nić, taśma klejąca i żyłtka do ich cięcia.
- 5) linijka z podziałką milimetrową,
- 6) stoper (wystarczy zegarek z sekundnikiem).

Uwaga: łącznika nie należy zdejmować z pręta, ani go przesuwac.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Część teoretyczna

Dostępne przyrządy sugerują, że w zadaniu należy mierzyć okres wahań wahadła. Moduł sztywności drutu stalowego można wyznaczyć budując wahadło torsyjne z badanego drutu i pręta z łącznikiem, tak jak pokazuje rycina 3.



Ryc. 3

Równanie ruchu takiego wahadła ma postać

$$I_1 \ddot{\alpha} = M,$$

gdzie I_1 - moment bezwładności pręta z łącznikiem względem osi obrotu $00'$, M - moment skręcający sił sprężystości. Zgodnie z treścią zadania dla małych wychyleń $M = -\pi GR^4 \alpha / (2L)$. Oznaczmy $k = \pi GR^4 / (2L)$, wtedy równanie ruchu przyjmuje postać

$$I_1 \ddot{\alpha} + k\alpha = 0.$$

Jest to równanie ruchu harmonicznego o częstości $(\omega)_1 = \sqrt{k/I_1}$. Okres drgań takiego wahadła torsyjnego wynosi $T_1 = 2\pi \sqrt{I_1/k}$. Otrzymujemy więc $k = \pi GR^4 / (2L) = 4\pi^2 I_1 / T_1^2$, a stąd

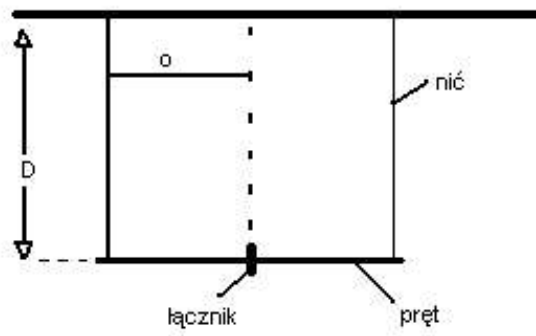
$$G = 8\pi I_1 L / (T_1^2 R^4)$$

W celu wyznaczenia modulu sztywności G należy zmierzyć długość L drutu i okres wahań T_1 wahadła torsyjnego. Promień drutu R jest znany. Jediną nieznaną wielkością jest więc moment bezwładności I_1 pręta z łącznikiem. Nie można obliczyć momentu bezwładności pręta wg znanego wzoru $I = ML^2 / 12$ (l – długość pręta) ponieważ podana była tylko sumaryczna masa pręta wraz z łącznikiem. Nie można też zaniedbać wkładu łącznika do momentu bezwładności, bo mimo małych rozmiarów ma on dużą masę.

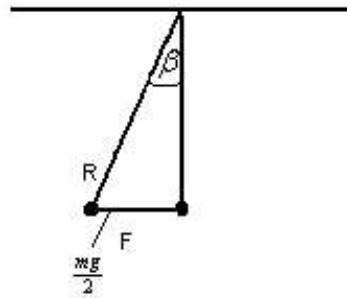
Proponujemy dwie metody doświadczalne wyznaczenia momentu bezwładności pręta z łącznikiem. Do prawidłowego rozwiązania zadania wystarczy zastosować jedną metodę.

Pierwsza metoda wyznaczenia I_1

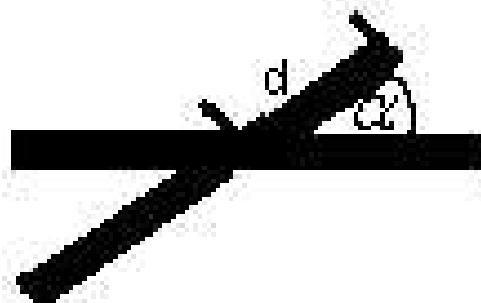
W celu wyznaczenia momentu bezwładności pręta z łącznikiem względem osi $00'$, tej samej co dla wahadła torsyjnego budujemy wahadło jak na rycinie 4 (ryc. 5, 6 i 7



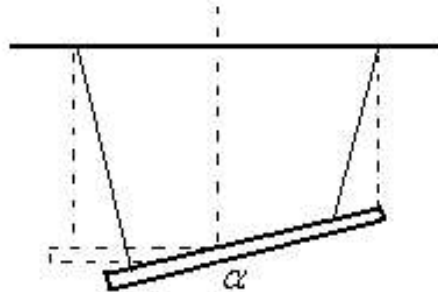
Ryc. 4



Ryc. 5 Widok z boku



Ryc. 6 .Widok z góry



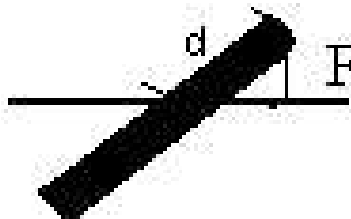
Ryc. 7 Widok perspektywiczny

Ruch takiego wahadła wokół osi $00'$ przechodzącej przez środek ciężkości pręta z łącznikiem jest dla małych wychyleń ruchem harmonicznym. Żeby to pokazać policzymy moment sił działających na pręt.

Na pręt działają siły: siła ciężkości mg i siły reakcji sprężystej nici R . Rozważmy siły działające na jeden koniec pręta

$$mg/2 + R = F.$$

Siła wypadkowa $F = mg/2 \sin \beta = mgh/(2l)$. Dla małych wychyleń siła F jest praktycznie pozioma. Na drugi koniec pręta działa F skier-



Ryc. 8

rowana przeciwnie. Moment pary sił działających na pręt względem osi $00'$ wynosi (ryc. 8)

$$M = 2Fd \sin \gamma.$$

Z twierdzenia sinusów $b/\sin\alpha = d/\sin\gamma$. Stąd $M = mgd^2/\sin\alpha$ dla małych wychyleń $\sin\alpha \approx \alpha$.

Równanie ruchu takiego wahadła więc postać

$$I_1\ddot{\alpha} = -mgd^2/l\alpha,$$

gdzie znak minus uwzględnia przeciwny zwrot przyspieszenia i wychylenia. Stąd

$$\ddot{\alpha} + mgd^2/(l \cdot I_1)\alpha = 0,$$

a okres drgań T_2 wynosi

$$T_2 = 2\pi\sqrt{I_1 \cdot l/(mgd^2)}.$$

Mierząc okres drgań T_2 oraz długości l i d można znając masę pręta z łącznikiem m i wyznaczyć moment bezwładności I_1 .

$$I_1 = T_2^2 \cdot mgd^2/(4\pi^2 l).$$

Stąd moduł sztywności drutu stalowego

$$G = 2Lmgd^2/(\pi R^4 I)(T_2^2/T_1^2).$$

Można też wyznaczyć moment bezwładności I_1 korzystając z zasady zachowania energii dla wahadła przedstawionego na ryc. 4.

$$I_1 \omega_{\max}^2 / 2 = mg\Delta h,$$

gdzie $(\omega)_{\max}$ jest maksymalną prędkością kątową wahadła przy obrocie o kąt α_{\max}

$$(\omega)_{\max} = 2\pi \alpha_{\max} / T_2.$$

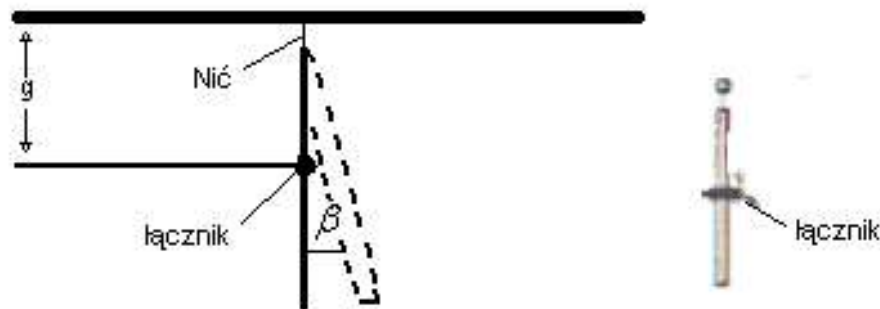
Wysokość Δh o jaką podnie się pręt przy obrocie wahadła o kąt α_{\max} można zmierzyć bezpośrednio, lecz przy dostępnych w zadaniu przyrządach pomiar taki byłby bardzo niedokładny. Można pokazać, że dla małych wychyleń

$$\Delta h = d^2 a_{\max}^2 / 2l .$$

Wyznaczając I_1 z powyższych równań otrzymuje się ten sam wzór co z równania ruchu.

Druga metoda wyznaczenia Momentu bezwładności I_1

Można też wyznaczyć moment bezwładności I pręta z łącznikiem względem innej osi niż $00'$, i nie przechodzącej przez środek masy, ale równoległej do osi $00'$, a następnie skorzystać z twierdzenia Steinera. W tym celu zbudujemy wahadło jak na rycinie 9.



Ryc. 9

Przy wychyleniu o mały kąt z działa na to wahadło względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt A moment siły ciężkości

$$M = mgd \sin \alpha ,$$

gdzie d jest odległością środka masy S od osi obrotu A . Oznaczając przez I moment bezwładności wahadła względem osi A możemy napisać równanie ruchu wahadła.

$$I\ddot{\alpha} = -mgd \sin \alpha ,$$

lub w przybliżeniu dla małych wychyleń

$$I\ddot{\alpha} = -mgd\alpha .$$

Stąd $\ddot{\alpha} + (mgd / I)\alpha = 0$, a okres drgań T_3 wznosi

$$T_3 = 2\pi \sqrt{I/(mgd)}.$$

Korzystając z twierdzenia Steinera możemy wyznaczyć moment bezwładności pręta z łącznikiem względem osi przechodzącej przez środek masy S i równoległej do osi A. Oś ta odpowiada osi 00', a więc szukany moment bezwładności I_1 wynosi

$$I_1 = I - md^2,$$

$$I_1 = T^2 mgd / (4\pi^2) - md^2$$

Moduł sztywności G badanego drutu

$$G = 8\pi L (T^2 mgd / (4\pi^2) - md^2) / (R^4 \cdot T^2).$$

Wahadło torsyjne

W doświadczeniu użyto drutu stalowego o średnicy $2R = 1,38 \text{ mm}$. Drut musi być tak zamocowany, żeby nie mógł się obracać. W tym celu końce drutu umocowano w metalowej części „bananków“ od przewodów elektrycznych, a dopiero te przykręcono w standardowych łącznikach. Jeden z łączników użyto do zawieszenia wahadła, a drugi do umocowania pręta. Użyto mosiężnego pręta o długości 25 cm i średnicy 13 mm, którego masa wraz z łącznikiem wynosiła $m = 420 \text{ g}$. Przed zawodami pręt połączono z łącznikiem w taki sposób, żeby po zawieszeniu wahadła wisiał poziomo (ryc. 3) i następnie silnie skręcono łącznik. Pręt z łącznikiem zważono, a średnice drutu zmierzono śrubą mikrometryczną. Otrzymane wartości m i R podano w treści zadania. Zawodnicy otrzymali drut oprawiony w „bananki“, pręt połączony trwale z łącznikiem oraz pozostałe przedmioty wymienione w treści zadania.

Rozwiązanie tej części zadania wymaga zbudowania wahadła torsyjnego jak pokazuje ryc. 3 i zmierzenia jego okresu drgań T_1 . Zawodnicy powinni zmierzyć długość drutu od punktu zamocowania do środka pręta stanowiącego wahadło torsyjne. W omawianym doświadczeniu długość drutu wynosiła $L = 55,5 \text{ cm}$. Następnie nadano prętowi małe wychylenie i patrząc z góry na wahadło zmierzono czas trwania kilkudziesięciu okresów T_1 . Pomiary powtórzono kilkakrotnie. Średnia wartość okresu wynosiła $T_1 = (1,04 \pm 0,01) \text{ s}$. Dokładny pomiar okresu ma istotne znaczenie dla wyniku doświadczenia ponieważ T_1 występuje we wzorze na G w kwadracie.

2. Wyznaczenie momentu bezwładności metodą pierwszą

Do zawieszenia pręta użyto dwóch nici lnianych o długości około 85 cm każda. Zawodnicy powinni zawiązać nici bardzo ściśle na prętach i umocować je w równych odległościach od krańców pręta stanowiącego wahadło (ryc. 4). Łącznik powinien

znajdować się w środku pręta tak jak w przypadku wahadła torsyjnego. Nie należy zmieniać położenia łącznika po jego zamocowaniu przy budowie wahadła torsyjnego.

Wygodnie jest jednak powiesić pręt tak by tym razem wystająca część łącznika, służąca uprzednio do zamocowania drutu, zwisała w dół. Nie ma to wpływu na wyznaczany moment bezwładności. Po skonstruowaniu wahadła zmierzono długość nici od punktu zamocowania do poziomej osi pręta $l = (80,5 \pm 0,05)$ cm oraz odległość między nimi $2d = (20,0 \pm 0,05)$ cm. Następnie nadano prętowi małe wychylenie względem osi $00'$ i zmierzono czas trwania kilkudziesięciu okresów T_2 , patrząc na wahadło z góry. Średnia wartość zmierzonego okresu wynosiła $T_2 = (1,05 \pm 0,01)$ s. Długość nici powinna być tak dobrana, żeby okres wahadła był rzędu 1 s, gdyż dla okresów krótszych pomiar jest trudniejszy. Stąd wyznaczono wartość modułu sztywności badanego drutu stalowego $G = (8300 \pm 500) \text{KG} / \text{mm}^2$, która jest w dobrej zgodności z wartością znaną dla stali w tablicach fizycznych $G = 8100 - 8500 \text{KG} / \text{mm}^2$.

3. Wyznaczenie momentu bezwładności metodą drugą

Wahadło przedstawione na ryc. 9 można traktować jak wahadło fizyczne jeśli nić na której zawieszono pręt jest bardzo krótka. W zadaniu do zawieszenia pręta użyto krótkiego kawałka nici, który umocowano taśmą klejącą na jednym z końców pręta tak by tworzył małą pętlę i do niej przywiązano bardzo krótką nić (rzc. 9). Ponieważ łącznik wystaje niesymetrycznie z jednej strony pręta więc środek masy wahadła jest nieznacznie przesunięty względem pionowej osi symetrii pręta. Uwidacznia się to w niewielkim odchyleniu pręta od pionu przy symetrycznym ustawieniu pręta powoduje że jego ruch po wychyleniu jest ruchem złożonym i nie odbywa się w jednej płaszczyźnie. Trzeba to skorygować przesuwając pętlę tak by pręt wisiał pionowo, a wtedy środek masy układu pręta i łącznika znajdzie się na osi pionowej pod punktem zamocowania. Po skonstruowaniu wahadła zmierzono odległość środka masy układu od osi obrotu $d = (14,2 \pm 0,05)$ cm. Żeby wyznaczyć moment bezwładności pręta z łącznikiem względem tej samej osi co w przypadku wahadła torsyjnego należy badać wychylenia w płaszczyźnie prostopadłej do dłuższej osi łącznika. Nadano prętowi małe wychylenie i zmierzono czas trwania kilkudziesięciu okresów T_3 , patrząc z boku na wahadło. Pomiar powtórzono kilkakrotnie. Średnia wartość zmierzonego okresu wynosiła $T_3 = (0,83 \pm 0,01)$ s. Stąd wyznaczono wartość modułu sztywności badanego drutu stalowego $G = (8400 \pm 500) \text{KG} / \text{mm}^2$.

Moment bezwładności wyznaczony tą metodą jest obliczany jako różnica wielkości o zbliżonych wartościach. Trzeba więc bardzo dokładnie zmierzyć wartości d i T_3 , żeby uzyskać poprawną wartość I

4. Ocena błędów

Wielkości mierzone obarczone są błędem pomiarowym związanym z dokładnością użytych przyrządów: $\Delta T = 0,01 \text{s}$, $\Delta L = \Delta l = \Delta d = 0,05 \text{ cm}$.

Przyjmujemy, że wielkości m i R nie są obarczone błędem. Dodatkowo występują pewne błędy systematyczne. Wyprowadzone przez nas wzory stosują się dla małych kątów, dla których $\sin \alpha \approx \alpha$. Dla $\alpha = 20^\circ$ wielkości te różnią się o 2%, a dla 30° o 4,5%. Niedokładności w zawieszeniu lub umocowaniu wahadeł prowadzą do błędów systematycznych, które jednak w starannym pomiarze dają się prawie całkowicie wyeliminować.

5. Uwagi dotyczące wykonania zadania przez uczestników Olimpiady

Zadanie zostało wykonane poprawnie przez większość uczestników. Niektórzy popełnili jednak błędy najważniejsze zostaną wymienione poniżej.

Nie wszyscy zawodnicy zdawali sobie sprawę, że zbudowany przez nich układ, który traktowali jako ciało sztywne o jednym stopniu swobody ma więcej stopni swobody i nie dążyli do ich wyeliminowania. Część uczniów nie rozumiała, że pojęcie momentu bezwładności jest ściśle związane z osią obrotu względem której się ten moment definiuje.

Trzeba pamiętać, że wykonanie pomiarów w funkcji jednego z parametrów nie zawsze pozwala na uśrednienie uzyskanych wyników z równymi wagami, a czasem w ogóle nie ma sensu. Na przykład niektórzy uczniowie wykonali pomiary okresu wahadła fizycznego przy różnych długościach nici, na której zawieszony był pręt i nie zważając na to, że im dłuższa nić tym wahadło gorzej spełnia warunki konieczne dla wahadła fizycznego, obliczali średnią wartość okresu. Zdarzało się nawet, że wśród uśrednianych wartości ujemne i to nie niepokoiło niektórych zawodników.

W wielu pracach dokumentacja pomiarów była bardzo uboga. Należy zwrócić uwagę uczniów, że prace powinny zawierać szczegółowy opis układu doświadczalnego, stosowanych metod pomiarowych oraz wykaz wyników wszystkich wykonanych pomiarów. Częstym błędem były też pomyłki w przekształceniach algebraicznych, których można łatwo uniknąć stosując rachunek wymiarowy. Dużą trudność sprawiają także uczniom rachunki, nawet przy użyciu kalkulatora, a szczególnie obliczenie rzędu wielkości.

Zasady punktacji

Proponujemy następującą punktację:

Część teoretyczna:

- | | |
|--|-----------|
| 1. Równanie ruchu dla wahadła torsyjnego | do 2 pkt. |
| 2. Wzór na okres drgań dla wahadła torsyjnego | do 1 pkt. |
| 3. Równanie ruchu dla drugiego wahadła zaproponowanego w celu wyznaczenia momentu bezwładności układu złożonego z pręta i łącznika | do 3 pkt. |
| 4. Wzór na okres drgań drugiego wahadła | do 1 pkt. |
| 5. Wzór na moment bezwładności I_1 układu pręta i łącznika | do 2 pkt. |
| 6. Wzór na moduł sztywności druta | do 1 pkt. |

Część doświadczalna:

- | | |
|--|-------------|
| 1. Opis konstrukcji wahadła torsyjnego | do 1 pkt. |
| 2. Pomiary dla wahadła torsyjnego (seria pomiarów, pomiar dużej liczby okresów) | do 2,5 pkt. |
| 3. Opis konstrukcji drugiego wahadła | do 1 pkt. |
| 4. Pomiary dla drugiego wahadła (seria pomiarów, pomiar dużej liczby okresów) | do 2,5 pkt |
| 5. Spełnienie warunków koniecznych dla prawidłowego wykorzystania metody pomiaru (małe wychylenia, dokładne umocowania, przesunięcie punktu zawieszenia w przypadku wahadła fizycznego itp.) | do 1 pkt. |
| 6. Obliczenie wartości końcowej G w dowolnych jednostkach | do 1 pkt. |
| 7. Ocena błędów (oszacowanie ΔG , omówienie źródeł błędów) | do 1 pkt |

Źródło:

Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl