

LV Olimpiada Fizyczna (2005/2006) – Zawody II stopnia

Zadanie doświadczalne

Dwa oporniki (R_1, R_2) oraz kondensator C połączono w układ elektryczny. Elementy obwodu zostały umieszczone w zamkniętym, izolującym pudełku. W trzech punktach obwodu utworzono kontakty, które umieszczono na ściankach pudełka i oznaczono literami A, B oraz C. Można do nich podłączyć przewody elektryczne.

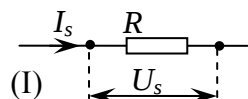
Mając do dyspozycji:

- woltomierz pozwalający na pomiar napięcia stałego oraz wartości skutecznej napięcia zmiennego,
- baterię 4,5 V,
- generator napięcia sinusoidalnego o częstotliwości regulowanej w zakresie 20÷1000 Hz,
- opornik o oporze 100 Ω ,
- przewody i zaciski umożliwiające zestawienie układu pomiarowego,
- papier milimetrowy,

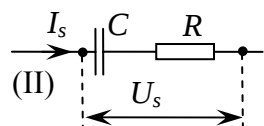
ustal, nie otwierając pudełka, schemat połączeń elementów w układzie elektrycznym zamkniętym w pudełku i wyznacz wartości oporów R_1, R_2 oraz pojemność C kondensatora.

Wskazówka:

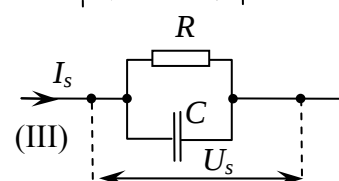
- 1) Przyjmij, że natężenie prądu płynącego przez woltomierz jest zanedbywane małe.
- 2) Dla przedstawionych poniżej obwodów elektrycznych zależność od częstotliwości f stosunku napięcia skutecznego U_s do prądu skutecznego I_s opisana jest następującymi wzorami:



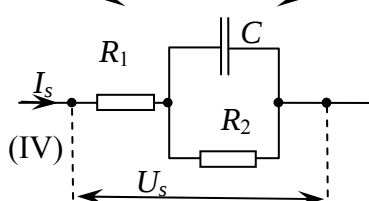
$$\frac{U_s}{I_s} = R$$



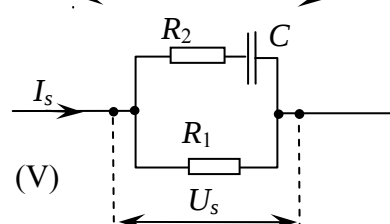
$$\frac{U_s}{I_s} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi f C)^2}}$$



$$\frac{U_s}{I_s} = \sqrt{\frac{R^2}{1 + (2\pi f R C)^2}}$$



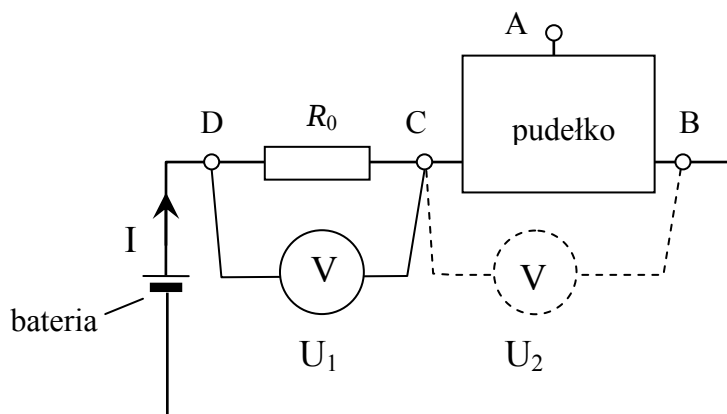
$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{\sqrt{[R_1 + R_2 + R_1(2\pi f R_2 C)^2]^2 + R_2^2(2\pi f R_2 C)^2}}{1 + (2\pi f R_2 C)^2}$$



$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{\sqrt{[R_1 + R_1 R_2 (R_1 + R_2)(2\pi f C)^2]^2 + R_1^4(2\pi f C)^2}}{1 + (R_1 + R_2)^2(2\pi f C)^2}$$

Rozwiązanie

Liczba różnych połączeń dwóch oporników i kondensatora jest duża, dlatego przed rozpoczęciem szczegółowych rozważań lepiej jest zbadać jak prąd stały przepływa pomiędzy różnymi parami kontaktów umieszczonych na ściankach pudełka. Pomiary można wykonać w układzie przedstawionym schematycznie na rys. 1. Stanowi on szeregowe połączenie baterii 4,5V, opornika R_0 (w doświadczeniu wykonanym przez recenzenta użyto opornika o oporze $99,0\ \Omega$) oraz części obwodu zamkniętego w pudełku, znajdującego się odpowiednio pomiędzy kontaktami AB, BC oraz AC. Zgodnie z informacją podaną w treści zadania dołączenie woltomierza (równolegle) do dowolnej części obwodu nie zmieni ani rozkładu napięć w obwodzie ani wartości prądu I płynącego w obwodzie. Dołączając woltomierz do par kontaktów DC oraz CB (rys. 1) zmierzono napięcia $U_1=(0,410\pm0,001)V$ oraz $U_2=(4,10\pm0,01)V$. Na ich podstawie wyznaczono oporność $R_{BC} = R_0 U_2 / U_1 = (1000\pm7)\ \Omega$ pomiędzy kontaktami BC obwodu.



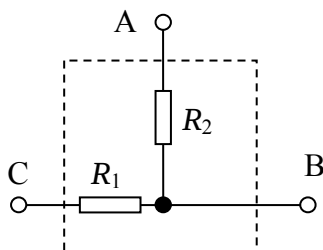
Rys. 1

W analogiczny sposób, dla przepływu prądu pomiędzy kontaktami AB uzyskano $U_1=(0,785V\pm0,001)V$ oraz $U_2=(3,68\pm0,01)V$, natomiast dla kontaktów AC zmierzono $U_1=(0,287\pm0,001)V$, $U_2=(4,22\pm0,01)V$. Wykorzystując te dane obliczono wartości oporów $R_{AB}=(469\pm2)\ \Omega$ oraz $R_{AC}=(1470\pm8)\ \Omega$.

Uzyskane wartości oporów świadczą o tym, że żaden z kontaktów nie jest połączony z pozostałymi jedynie poprzez kondensator. Warto zauważyć, że z dokładnością do niepewności pomiarowych, wyznaczone oporności spełniają równość:

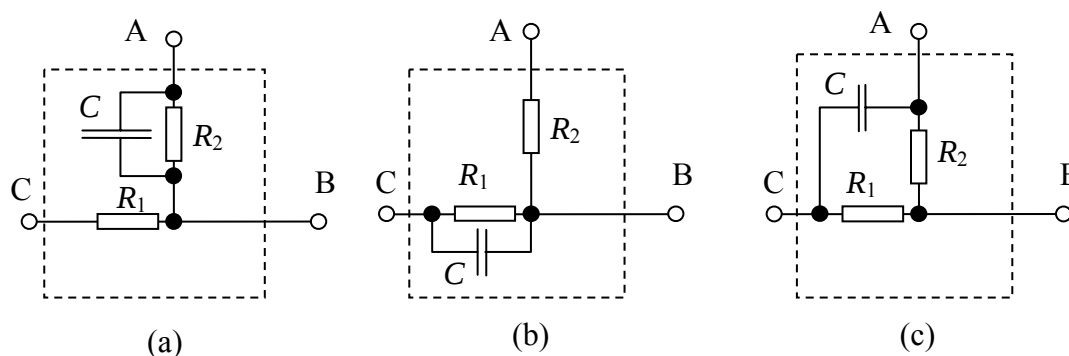
$$R_{AC}=R_{AB}+R_{BC} . \quad (1)$$

Taki wynik można osiągnąć tylko przy połączeniu oporników w sposób pokazany schematycznie na rys. 2, dla wartości oporności $R_1=(1000\pm7)\ \Omega$ oraz $R_2=(469\pm2)\ \Omega$.



Rys. 2

Do pełnego rozwiązania zadania pozostało ustalenie sposobu umieszczenia w obwodzie kondensatora oraz wyznaczenie jego pojemności C . Przy założeniu, że kondensator nie został zwarty, możliwe są trzy nierównoważne sposoby umieszczenia go w układzie (rys. 3).

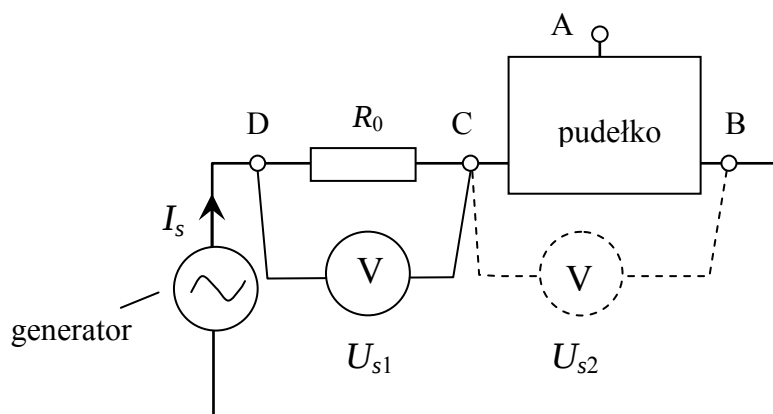


Rys. 3

Trzy konfiguracje przedstawione schematycznie na rys. 3 różnią się zachowaniem przy zasilaniu prądem zmiennym. Ponieważ możliwość szeregowego połączenia kondensatora z opornikiem została już wyeliminowana to należy się spodziewać, że poszczególne gałęzie obwodu będą zachowywać się tak jak odpowiednie układy przedstawione na schematach (I), (III) lub (IV), zamieszczone we wskazówce do zadania. O ile dla układu (I), stosunek $Z = U_s/I_s$ (czyli moduł impedancji lub zawady) nie zależy od częstotliwości, to zachowanie obwodów (III) oraz (IV) dla dużych częstotliwości różni się: $Z_{III} \rightarrow 0$, natomiast $Z_{IV} \rightarrow R_1$. Warto też zwrócić uwagę, że przy przejściu do niskich częstości $Z_{III} \rightarrow R$ natomiast $Z_{IV} \rightarrow R_1 + R_2$. Odpowiednie pomiary dla różnych częstotliwości prądu przemiennego można wykonać w układzie przedstawionym na rys. 4. Na podstawie pomiarów napięcia U_{s1} oraz U_{s2} można wyznaczyć zależność zawady między poszczególnymi parami kontaktów od częstotliwości f :

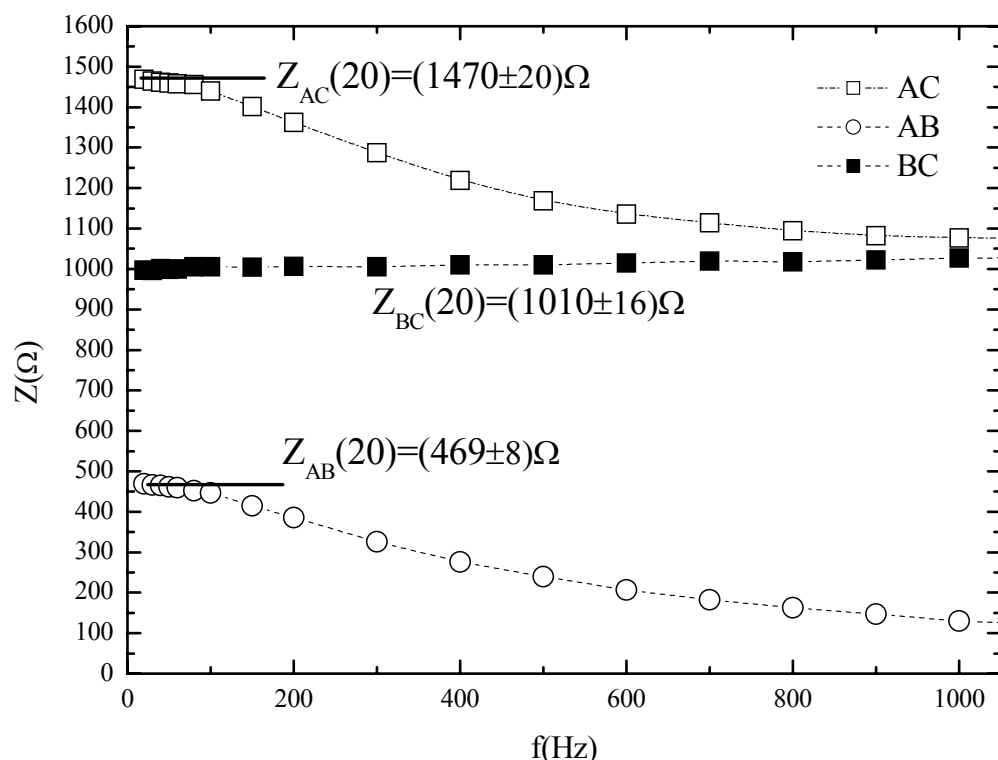
$$Z(f) = \frac{U_s(f)}{I_s(f)} = R_0 \frac{U_{s2}(f)}{U_{s1}(f)} \quad (2)$$

Wykonując pomiary z użyciem generatora należy ustawić na woltomierzu odpowiedni zakres napięcia zmiennego.



Rys. 4

Uzyskane wyniki pomiarów, po przeliczeniu zgodnie ze wzorem (2), przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5

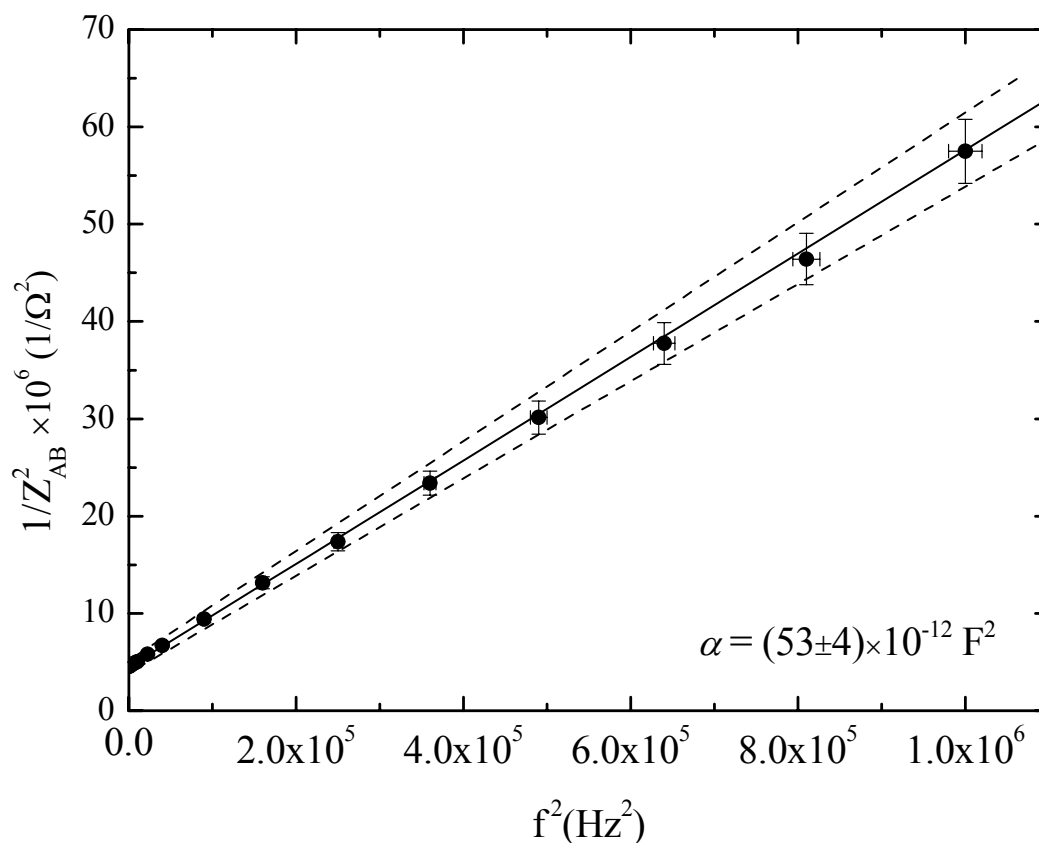
Z rys. 5 wynika, że impedancja pomiędzy wyprowadzeniami BC, z dokładnością do niepewności pomiarowych, nie zależy od częstotliwości. Spośród układów przedstawionych na rys. 3 takiego zachowania można spodziewać się jedynie dla konfiguracji przedstawionej na Rys. 3 (a). Wartość oporu pomiędzy kontaktami BC, wynikająca z dopasowania poziomej prostej, wynosi $(1010 \pm 16) \Omega$ i w granicach niepewności pomiarowej jest zgodna z wartością oporu $R_{BC} = R_1 = (1000 \pm 7) \Omega$ uzyskaną dla pomiarów z wykorzystaniem prądu stałego.

Z powyższych rozważań, wynika, że kondensator połączony jest równolegle z opornikiem R_2 . Potwierdzają to uzyskane zależności częstotliwościowe dla kontaktów AB oraz AC. Zawada Z_{AC} dla dużych częstotliwości dąży do wartości R_1 , czyli zgodnie z zachowaniem oczekiwanym dla układu (IV), natomiast impedancja Z_{AB} przy wzroście częstotliwości zmniejsza się do zera, czyli tak jak oczekiwalibyśmy od układu (III). Warto też zauważyć, że dla częstotliwości 20 Hz, wartość impedancji $Z_{AC} = (1470 \pm 20) \Omega \cong R_{AC}$ natomiast $Z_{AB} = (469 \pm 8) \Omega \cong R_{AB}$, co jeszcze raz potwierdza, że mamy do czynienia z konfiguracją przedstawioną na rys. 3 (a).

Wartość pojemności C można wyznaczyć analizując zależność Z_{AB} od częstotliwości, która powinna mieć formę przewidywaną dla układu (III). Zależność zawady od częstotliwości podaną we wskazówce dla układu (III) można przekształcić do postaci:

$$\frac{1}{Z_{AB}^2} = \frac{1}{R_2^2} + (2\pi C)^2 f^2 \quad (3)$$

Jeśli wykreślimy zależność wielkości $(1/Z_{BC})^2$ od kwadratu częstotliwości, otrzymamy prostą o współczynniku nachylenia $\alpha = (2\pi C)^2$. Odpowiednio przeliczone dane eksperymentalne wraz z dopasowaną prostą przedstawia rys. 6:



Rys. 6

Z dopasowania prostej wyznaczono współczynnik $\alpha = (53 \pm 4) \times 10^{-12} \mu\text{F}^2$. Jego niepewność oszacowano graficznie. Dopasowanej wartości współczynnika α odpowiada pojemność

$$C = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi} = (1,15 \pm 0,04) \mu\text{F}.$$

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że układ dwóch oporników i kondensatora został połączony zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 3 (a). Wartości oporów wynoszą: $R_1 = (1000 \pm 7) \Omega$ oraz $R_2 = (469 \pm 2) \Omega$, natomiast pojemność kondensatora podłączonego równolegle do opornika R_2 wynosi $C = (1,15 \pm 0,04) \mu\text{F}$.

Proponowana punktacja

- 1) Zestawienie układu umożliwiającego wyznaczenie oporności i zawady przy użyciu jednego woltomierza, baterii lub generatora i opornika o znanej oporności do 2 pkt.
- 2) Wykonanie pomiarów napięć U_1 oraz U_2 umożliwiających wyznaczenie oporności pomiędzy kontaktami AB, BC, AC obwodu elektrycznego do 1 pkt.
- 2) Określenie rozmieszczenia oporów R_1 i R_2 w układzie do 2 pkt.
- 3) Wyznaczenie wartości oporności R_1 i R_2 i ich niepewności pomiarowych do 3 pkt.
- 4) Analiza możliwych połączeń kondensatora w układzie do 1 pkt.
- 5) Wykonanie pomiarów napięć U_{s1} oraz U_{s2} dla różnych częstotliwości prądu zmiennego i różnych par kontaktów, umożliwiających ustalenie sposobu podłączenia kondensatora w układzie oraz wyznaczenie jego pojemności do 6 pkt.
- 6) Analiza zależności zawady od częstotliwości dla poszczególnych par kontaktów i ustalenie sposobu połączenia kondensatora do 3 pkt.
- 7) Wyznaczenie wartości pojemności kondensatora i jej niepewności pomiarowej do 2 pkt.