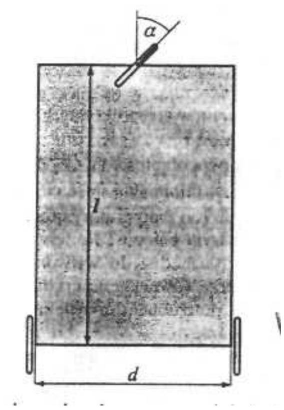
LIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Pojazd na zakręcie"

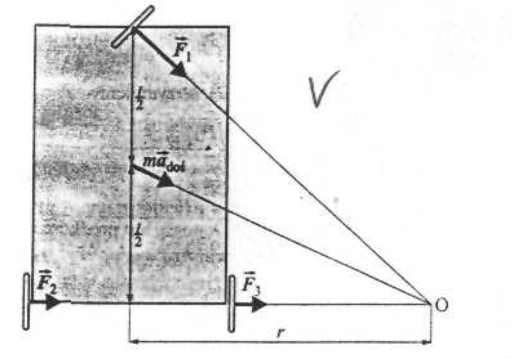
Pojazd składa się prostopadłościennego nadwozia o szerokości d i długości l oraz z trzech kół. Jedno koło umocowane jest na środku przedniej krawędzi nadwozia w taki sposób, że może być skręcane przez kierującego pojazdem wokół osi pionowej przechodzącej przez środek koła. Pozostałe dwa koła umieszczone są na końcach jednej osi pokrywającej się z tylną krawędzią nadwozia (patrz rysunek)



Na zakręcie, mając skręcone koło o kąt $\alpha=\pi/4$, pojazd porusza się maksymalną prędkością, przy której jeszcze nie wpada w poślizg. Z jaką prędkością pojazd będzie się poruszał po wyjechaniu na prostą, jeżeli kierowca będzie bardzo łagodnie prostował przednie koło? Współczynnik tarcia statycznego koło-podłoże wynosi μ. Całkowita masa pojazdu wraz z kierowcą wynosi m i jest równomiernie rozłożona wewnątrz nadwozia. Koła są jednakowe, wąskie i obracają się niezależnie od siebie. Ich masę pomijamy. W rozważaniach zaniedbaj również wysokość pojazdu. Silnik pojazdu jest włączony na całej rozważanej drodze, opór toczenia i opór powietrza pomijamy. Droga jest idealnie pozioma. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

1.Pierwszym etapem rozwiązania jest wyznaczenie prędkości pojazdu w trakcie ruchu na zakręcie. Zagadnienie będziemy traktować jako płaskie.



Ruch jest jednostajnym obrotem wokół punktu 0 będącego przecięciem prostych stanowiących osie obrotu kół. Punkt 0 znajduje się na przedłużeniu tylnej osi pojazdu, w odległości r=l tgα od jej środka. Na pojazd działają siły tarcia prostopadłe do płaszczyzny kół (czyli wzdłuż ich osi obrotu) $\vec{F}$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Siły te wywołują przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}_{doś}$ środka masy pojazdu:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}_{doś} \cdot$$

Rozkładając powyższe równanie na składowe wzdłuż boków pojazdu i uwzględniając zależności geometryczne, dostajemy

$$F_1 \sin\alpha + F_2 + F_3 = ma_{doś} \frac{r}{r_M} \qquad (1)$$

$$F_1 \cos\alpha = m \; a_{doś} \frac{l/2}{r_M} \qquad (2)$$

gdzie $r_M = \sqrt{r^2 + (l/2)^2}$ jest odległością środka masy pojazdu od punktu obrotu 0. Eliminując z powyższych równań $a_{doś}$, dostajemy

$$\frac{l/2}{r_M}(F_1 \cos\alpha + F_2 + F_3) = \frac{r}{r_M} F_1 \sin\alpha,$$

czyli

$$F_2 + F_3 = (\frac{r}{l/2} \sin\alpha - \cos\alpha) F_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}} F_1 \; . \qquad (3)$$

Równanie (3) można też otrzymać z warunku zerowania się momentu sił względem środka masy. Z (3) otrzymujemy, że

$$F_1 \rangle F_2 + F_3 \; . \qquad (4)$$

Ciężar pojazdu rozkłada się równomiernie na przednią i tylnią oś. Koła się nie ślizgają, co oznacza, że

$$F_1 \le \frac{mg}{2} \mu \qquad F_2 + F_3 \le \frac{mg}{2} \mu \; . \qquad (5)$$

Ponieważ pojazd porusza się na granicy poślizgu, z (5) i (4) otrzymujemy

$$F_1 = \frac{mg}{2}\mu\ .$$

Wstawiając ten wynik do (2), otrzymujemy

$$a_{doś} = g\mu \frac{\sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}}{\sqrt{l^2 + r^2}}\ .$$

Niech ω oznacza prędkość kątową , a ν prędkość liniową środka masy. Ponieważ $a_{doś} = \omega^2 r_M = \nu^2 / r_M$, mamy

$$\omega^2 = g\mu \frac{1}{\sqrt{l^2 + r^2}}, \qquad \nu^2 = g\mu \frac{\frac{l^2}{4} + r^2}{\sqrt{l^2 + r^2}}\ .$$

2. moment bezwładności pojazdu względem środka masy wynosi $I = m\frac{d^2 + l^2}{12}$.
Dlatego energia kinetyczna pojazdu poruszającego się na zakręcie jest równa

$$E_{zakr} = \frac{1}{2}(mr_M^2 + I)\omega^2 + \frac{1}{2}m(r^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{d^2}{12})g\mu \frac{1}{\sqrt{l^2 + r^2}}\ .$$

Ta energia jest równa energii kinetycznej ruchu postępowego pojazdu po wyprostowaniu przedniego koła, czyli

$$E_{zakr} = \frac{1}{2}m\nu_{końo}^2.$$

Stąd

$$\nu_{końo} = \sqrt{(r^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{d^2}{12}g\mu \frac{1}{\sqrt{l^2 + r^2}}}$$

Dla $\alpha = \pi / 4$ mamy $r = l$, co daje

$$\nu_{końo} = \sqrt{g\mu l}\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{2}}}\sqrt{1 + \frac{d^2}{16l^2}}\ .$$

Współczynnik $\sqrt{g\mu l}$ w tym wzorze odpowiada maksymalnej prędkości, z jaką może poruszać się samochód o bardzo małych rozmiarach na zakręcie o promieniu l. Czynnik

$$\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{2}}}\sqrt{1 + \frac{d^2}{16l^2}} \approx 0,971\sqrt{1 + \frac{d^2}{16l^2}}$$

jest, biorąc pod uwagę wszystkie idealizacje, bardzo zbliżony do 1 (np. $\nu_{końo} = 0,971\sqrt{g\mu l}$ dla d=0, a $\nu_{końo} = 1,001\sqrt{g\mu l}$ dla d=1). Może on być znacząco różny od 1 jedynie dla dużych d / l
, co raczej nie odpowiada żadnemu realistycznemu przypadkowi. Warto zauważyć, że w praktyce wartość $\nu_{końo}$ nie jest oszałamiająca: np. dla d=1m, l=2m, μ=1 otrzymamy $\nu_{końo} \approx 4,4m/s$.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”