LII Olimpiada Fizyczna – zawody II stopnia

ZADANIE 1

Wewnątrz satelity poruszającego się po orbicie geostacjonarnej umieszczono układ dwóch małych, identycznych kulek o masie dużo większej od masy łączącego je sztywnego pręta. Układ może swobodnie obracać się wokół nieruchomego względem satelity środka pręta. Znajdź położenia równowagi układu kulek i pręta. Wyznacz okres małych drgań układu w płaszczyźnie orbity wokół położenia równowagi.

Uwaga: Siły grawitacji działające na obie kulki nie są równe, możesz jednak przyjąć, że są równoległe.

Wskazówka: Dla małych wartości x można stosować przybliżenie: $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$

ROZWIĄZANIE

Zadanie rozwiążemy w układzie spoczynkowym satelity. Układ ten jest nieinercjalny, należy więc uwzględnić występujące w nim siły bezwładności.

Ponieważ obie kulki znajdują się w rożnych odległościach od Ziemi, więc jedna z nich jest przyciągana mocniej. Pojawia się zatem pewien moment sił grawitacyjnych M_g względem osi przechodzącej przez środek pręta i prostopadłej do płaszczyzny ruchu, dążący do ustawienia pręta wzdłuż promienia orbity. Ponieważ odległość l między kulkami jest dużo mniejsza niż promień orbity r, zachodzi

$$M_g \approx \frac{GMm}{\left(r + \frac{l}{2}\cos\alpha\right)^2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha - \\ - \frac{GMm}{\left(r - \frac{l}{2}\cos\alpha\right)^2} \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha \quad ,$$

gdzie M jest masą Ziemi, m masą każdej z kulek, natomiast α kątem między prętem, a odcinkiem łączącym środek Ziemi ze środkiem pręta. Korzystając ze wskazówki, otrzymujemy

$$M_g \approx -\frac{GMml^2}{r^3}\sin\alpha\cos\alpha .$$

Na układ kulek i pręta działają ponadto siły odśrodkowe. Ich moment M_o wynosi:

$$M_o \approx m\Omega^2\left(r - \frac{l}{2}\cos\alpha\right) \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha - \\ - m\Omega^2\left(r + \frac{l}{2}\cos\alpha\right) \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha = \\ = -\frac{ml^2\Omega^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha ,$$

gdzie Ω jest częstością kołową obiegu Ziemi przez satelitę. Ponieważ

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} ,$$

możemy zapisać także

$$M_g \approx -ml^2\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

Siła Coriolisa działa w płaszczyźnie ruchu, prostopadle do prędkości poruszającego się ciała (czyli wzdłuż pręta), dlatego w konsekwencji nie daje wkładu do całkowitego momentu siły M_c działającego na układ kulek. Moment ten wynosi zatem

$$M_c = -\frac{3}{2}ml^2\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha .$$

Położenia równowagi układu kulek wyznaczamy z warunku $M_c = 0$, otrzymując $\alpha = 0$ lub $\alpha = \pi/2$. Częstość małych drgań wokół pierwszego położenia równowagi możemy wyznaczyć, przybliżając $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz $\cos\alpha \approx 1$. Wtedy

$$M_c \approx -\frac{3}{2}ml^2\Omega^2\alpha .$$

Ponieważ moment bezwładności układu $I = \frac{ml^2}{2}$, więc częstość drgań wynosi $\sqrt{3}\Omega$, a ich okres:

$$t = \frac{T}{\sqrt{3}} ,$$

gdzie T jest okresem obiegu Ziemi przez satelitę geostacjonarnego.

Podstawiając $T = 24$ h, otrzymujemy $t = 13{,}9$ h.

Natomiast równowaga w położeniu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nie jest stabilna i małe drgania wokół niego nie są możliwe. Aby się o tym przekonać, podstawmy $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ do wzoru na M_c:

$$M_c = \frac{3}{2}ml^2\Omega^2\cos\beta\sin\beta \approx \frac{3}{2}ml^2\Omega^2\beta .$$

Moment sił dąży do zwiększania się wychylenia układu z tego położenia równowagi, co świadczy o niestabilności.

ZADANIE 2

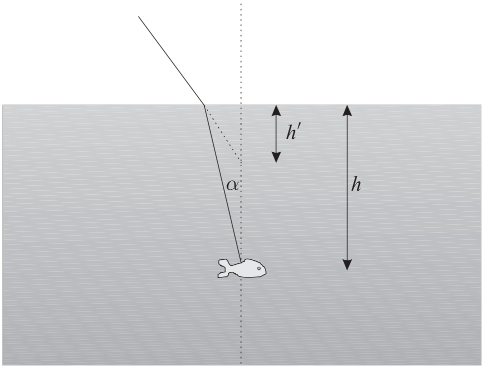
Ichtiolog oglądał przez lupę rybkę pływającą w akwarium na głębokości $h = 10$ cm. Użyta lupa była soczewką dwuwypukłą o promieniach krzywizn równych $R = 25$ cm, wykonaną ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}5$. Lupa umieszczona została poziomo na wysokości $w = 5$ cm nad powierzchnią wody w taki sposób, aby obserwowana rybka znajdowała się na osi symetrii soczewki. Następnie ichtiolog opuścił lupę na powierzchnię wody zanurzając jedną stronę soczewki. Jakie było położenie obrazu rybki w obu przypadkach? Współczynnik załamania światła w wodzie $n' = 4/3$.

ROZWIĄZANIE

Rozważmy promień światła biegnący od rybki ku górze pod kątem α do pionu (rysunek 1). Przy przechodzeniu przez granicę ośrodków (woda–powietrze) promień ulegnie załamaniu, tworząc pozorny obraz rybki na głębokości h'. Z elementarnej geometrii i prawa Snelliusa dostajemy:

$$h' = h\frac{\sqrt{\frac{1}{n'^2} - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Dla promieni przyosiowych ($\sin\alpha \approx 0$, $\cos\alpha \approx 1$) mamy w przybliżeniu $h' \approx \frac{h}{n'}$.



Rys. 1

Znając promienie krzywizn soczewki, możemy obliczyć jej ogniskową $f = \frac{R}{2(n-1)} = 25$ cm, a z równania soczewki

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{h' + w} + \frac{1}{y}$$

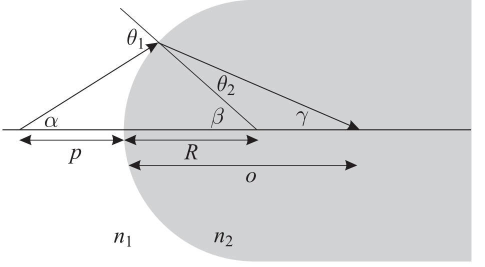
znajdujemy położenie y obrazu rybki:

$$y = \left(\frac{2(n-1)}{R} - \frac{1}{w + \frac{h}{n'}}\right)^{-1} = -25\ \text{cm}.$$

Ujemny znak oznacza, że obraz jest pozorny.

Aby wyznaczyć położenie obrazu rybki w przypadku, gdy lupa znajduje się na powierzchni wody, wyprowadźmy równanie soczewki wykonanej z materiału o współczynniku załamania n_2 znajdującej się pomiędzy ośrodkami o współczynnikach n_1 i n_3.

Rozważmy najpierw promień światła przechodzący z ośrodka o współczynniku n_1 do ośrodka o współczynniku n_2 poprzez granicę o promieniu krzywizny R (rys. 2).



Rys. 2

Z prawa Snelliusa dla promieni przyosiowych wynika związek $n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2$. Ponieważ $\theta_1 = \alpha + \beta$, oraz $\theta_2 = \beta - \gamma$, więc $n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$. Dla promieni biegnących blisko osi mamy ponadto $p\alpha \approx R\beta \approx o\gamma$. Stąd zaś wynika równanie

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Analogiczne równanie otrzymujemy dla promienia wychodzącego z ośrodka o współczynniku załamania n_2 do ośrodka o współczynniku n_3.

$$\frac{n_2}{p'} + \frac{n_3}{o'} = \frac{n_2 - n_3}{R}.$$

Równanie cienkiej soczewki możemy otrzymać z dwóch powyższych równań, przyjmując, że położenie przedmiotu przed drugą powierzchnią znajduje się w położeniu obrazu za pierwszą powierzchnią, czyli $p' = -o$.

Oznaczając położenie przedmiotu względem soczewki przez x i położenie obrazu przez y, dostajemy:

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_3}{y} = \frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R}.$$

Przyjmując $n_1 = \frac{4}{3}$ (woda), $n_2 = 1{,}5$ (szkło) i $n_3 = 1$ (powietrze) oraz $x = h$, znajdujemy położenie y obrazu:

$$y = n_3\left(\frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R} - \frac{n_1}{h}\right)^{-1} = -9{,}73\ \text{cm}.$$

Obraz jest pozorny, jak poprzednio. Znajduje się jednak bliżej lupy.

ZADANIE 3

W niektórych sondach kosmicznych stosuje się źródła energii wykorzystujące zjawisko rozpadu β^- (z jądra emitowany jest elektron) zachodzące między innymi w plutonie ^{241}Pu.

Rozważ ogniwo składające się z kwadratowej blaszki o grubości $d = 0{,}1$ mm i boku $a = 10$ cm wykonanej z plutonu ^{241}Pu umieszczonej między przewodzącymi blaszkami o grubości dostatecznej, by pochłonąć wszystkie wyemitowane elektrony. Zewnętrzne blaszki są ze sobą zwarte i tworzą elektrodę ujemną, natomiast środkowa plutonowa blaszka tworzy elektrodę dodatnią. Odległość pomiędzy środkową blaszką a każdą z blaszek zewnętrznych wynosi $l = 1$ mm. Oblicz stacjonarne natężenie prądu generowanego przez to ogniwo. Wyznacz czas, po którym napięcie nieobciążonego ogniwa wzrośnie od 0 do $U = 100$ V.

Gęstość plutonu $\rho = 19{,}8$ g/cm^3, a jego czas połowicznego zaniku $T = 13$ lat. Przyjmij, że wszystkie wyemitowane elektrony docierają do elektrody ujemnej, a czas ładowania jest zaniedbywany krótki w porównaniu z czasem połowicznego zaniku.

ROZWIĄZANIE

Liczba atomów plutonu zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

gdzie λ – stała rozpadu izotopu. W czasie Δt rozpada się więc

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}) \approx N_0 \lambda \Delta t$$

atomów. Liczba emitowanych w jednostce czasu elektronów jest równa liczbie rozpadających się atomów, zatem stacjonarne natężenie prądu przepływającego pomiędzy elektrodami ogniwa wynosi

$$I = \frac{\Delta N}{\Delta t} q_e = N_0 \lambda q_e,$$

gdzie q_e jest ładunkiem elektronu. Dla czasów krótkich w porównaniu z czasem połowicznego zaniku liczba atomów nie zmienia się i wynosi $N_0 = \frac{M}{\mu} N_A$, gdzie μ – masa molowa plutonu, N_A – liczba Avogadro, a $M = a^2 d\rho$ jest masą blaszki z plutonu. Stała zaniku λ związana jest z czasem połowicznego zaniku zależnością

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Zatem ogniwo może dostarczać prądu o natężeniu

$$I = \frac{a^2 d\rho q_e N_A \ln 2}{\mu T} = 13{,}4\ \mu\text{A}.$$

Czas ładowania ogniwa odpowiada czasowi ładowania kondensatora o pojemności C, utworzonego przez elektrody ogniwa, stałym prądem o natężeniu I:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{UC}{I}.$$

Pojemność kondensatora można obliczyć, zauważając, że układ elektrod odpowiada dwóm, połączonym równolegle, kondensatorom płaskim. Zatem pojemność elektryczna ogniwa jest równa dwukrotnej pojemności płaskiego kondensatora o powierzchni elektrod a^2 i grubości l:

$$C = \frac{2\varepsilon_0 a^2}{l}.$$

Czas ładowania ogniwa od 0 do 100 V wynosi zatem

$$t = \frac{2\varepsilon_0 SU}{lI}.$$

Po wstawieniu danych liczbowych i wykorzystaniu obliczonej wcześniej wartości I otrzymujemy $t = 1{,}324$ ms.

ZADANIE DOŚWIADCZALNE

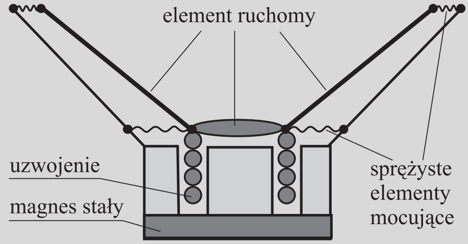
Element ruchomy głośnika można traktować jako ciało sztywne, o pewnej masie, przymocowane sprężyście do obudowy głośnika. Element ten może wykonywać drgania harmoniczne.

Masz do dyspozycji:

- głośnik,
- generator napięcia sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości,
- woltomierz napięcia zmiennego,
- trzy monety 50 gr o masie 3,95 g każda,
- monetę 2 zł,
- kawałki dwustronnej taśmy klejącej o gęstości powierzchniowej 0,01 g/cm^2,
- papier milimetrowy,
- przewody elektryczne umożliwiające zestawienie układu doświadczalnego.

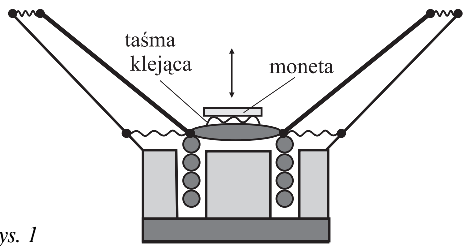
1) Wyznacz masę monety 2 zł.
2) Wyznacz masę elementu ruchomego głośnika.

Wskazówka: Połącz głośnik z generatorem i wyznacz częstotliwość, dla której napięcie zmienne mierzone na głośniku osiąga maksymalną wartość. Przyjmij, że częstotliwość ta odpowiada częstotliwości drgań własnych elementu ruchomego głośnika.



ROZWIĄZANIE

Pomysł rozwiązania zadania opiera się na założeniu, że element ruchomy głośnika zachowuje się jak oscylator harmoniczny.



Rys. 1

Częstotliwość drgań własnych tego oscylatora zależy od masy m_0 elementu ruchomego głośnika oraz sprężystości jego zamocowania:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_0}},$$

gdzie k – efektywny współczynnik sprężystości. Jeśli element ruchomy obciążyć monetą o masie m (rys. 1), to częstotliwość drgań własnych wyniesie

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_0 + m}},$$

co można przedstawić w postaci:

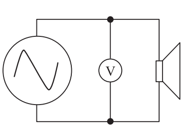
$$\frac{1}{f^2} = \frac{(2\pi)^2}{k}(m_0 + m).$$

Widzimy, że w przypadku, gdy efektywny współczynnik sprężystości k jest stały, kwadrat odwrotności częstotliwości rezonansowej jest funkcją liniową masy monet obciążających głośnik.

W doświadczeniu należy więc zbadać zależność częstotliwości rezonansowej głośnika od masy obciążających go monet. Dzięki temu, znając częstotliwość rezonansową odpowiadającą monecie dwuzłotowej, można będzie znaleźć jej masę. Z dopasowania prostej do danych pomiarowych można będzie wyznaczyć masę elementu ruchomego m_0.

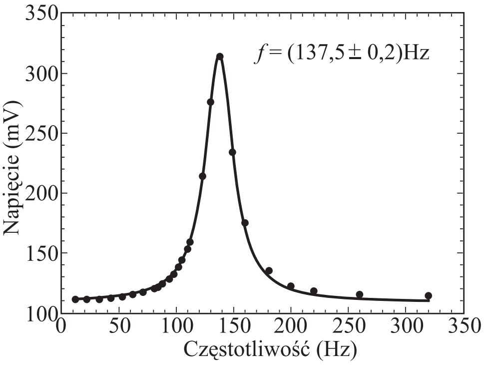
Część doświadczalna

Montujemy układ elektryczny przedstawiony schematycznie na rys. 2 i wyznaczamy częstotliwość rezonansową odpowiadającą nieobciążonemu głośnikowi.



Rys. 2

Można to zrobić, badając zależność napięcia na głośniku od częstotliwości odczytywanej ze skali generatora. Przykładowe wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 3. Wykonanie takich pomiarów nie było wymagane od zawodników, daje ono jednak informację o dokładności, z jaką można wyznaczyć wartość częstotliwości rezonansowej. Zawodnicy mogli



Rys. 3

po prostu odczytać ze skali generatora częstotliwość odpowiadającą maksymalnemu napięciu na głośniku. Kilkakrotne powtórzenie pomiaru pozwala wyznaczyć jej wartość średnią oraz błąd pomiarowy. Wyznaczona taką metodą częstotliwość rezonansowa dla nieobciążonego głośnika wyniosła $f_0 = (137 \pm 2)$ Hz.

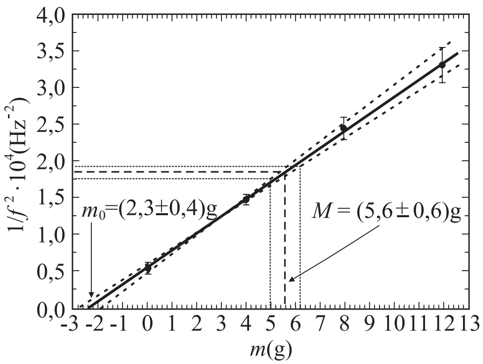
Następnie wykonujemy podobne pomiary dla głośnika obciążonego różną liczbą monet 50 gr oraz monetą 2 zł, przyklejonymi dwustronną taśmą klejącą do elementu ruchomego. Masę taśmy można wyznaczyć, znając gęstość powierzchniową oraz wymiary użytych kawałków taśmy (można do tego celu wykorzystać papier milimetrowy). Ta dodatkowa masa jest jednak niewielka. Do przyklejenia monety wystarcza kawałek taśmy o wymiarach 2×2 cm, co przy jej gęstości powierzchniowej $0{,}01\ \mathrm{g/cm^2}$ odpowiada masie 0,04 g.

Korzystając z wyników pomiarów uzyskanych dla monet 50 gr sporządzono wykres zależności odwrotności częstotliwości rezonansowej od masy monet obciążających głośnik. Przykładowe wyniki przedstawiono na rys. 4. Niepewność pomiarową wartości $1/f^2$ wyznaczono metodą różniczki zupełnej:

$$\Delta\left(\frac{1}{f^2}\right) = \frac{2}{f^2}\frac{\Delta f}{f},$$

gdzie Δf – niepewność wyznaczenia częstotliwości rezonansowej.

Do otrzymanych w taki sposób punktów pomiarowych dopasowano prostą (rys. 4). Niepewność dopasowania prostej oszacowano dorysowując dodatkowe proste mieszczące się w granicach niepewności dla poszczególnych punktów pomiarowych. Widać, że dopasowana prosta dobrze opisuje wyniki doświadczalne. Można zatem wnioskować, że w rozważanym obszarze częstotliwości efektywny współczynnik sprężystości k zamocowania elementu ruchomego głośnika nie zmienia się. Znając częstotliwość rezonansową dla monety 2 zł, odczytujemy z wykresu przedstawionego na rys. 4 odpowiadającą



Rys. 4

jej masę $m_d = (5{,}6 \pm 0{,}6)$ g. Szacując niepewność pomiarową, należy uwzględnić nie tylko błąd wyznaczenia wartości $1/f^2$, odpowiadającej monecie 2 zł, ale również niepewność dopasowania prostej przedstawionej na rys. 4. Poprawka 0,04 g wynikająca z masy taśmy klejącej jest niewielka i można ją pominąć w porównaniu błędem odczytu masy z wykresu.

Ekstrapolując otrzymaną zależność liniową do granicy $1/f^2 \to 0$, z wykresu przedstawionego na rys. 4 odczytujemy masę elementu ruchomego $m_0 = (2{,}3 \pm 0{,}4)$ g.

Uzyskane masy są z dokładnością do niepewności pomiarowych równe masom wyznaczonym przy użyciu wagi, odpowiednio: 5,15 g dla monety 2 zł oraz 2,5 g dla elementu ruchomego.

Uzyskanie poprawnego wyniku końcowego zależy w dużej mierze od staranności wykonania pomiarów. Ważne jest, aby monety były dobrze przyklejone do elementu ruchomego. W przeciwnym razie mogą one wykonywać skomplikowane ruchy, uniemożliwiające zastosowanie prostych założeń przyjętych w zadaniu.

Autorzy:
zadania teoretyczne – **mgr Andrzej Dragan**;
zadanie doświadczalne – **dr Andrzej Wysmołek**.
Obaj z KGOF i Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.

„Lwiątko 2003” – sprawozdanie

■ PIOTR GOLDSTEIN, ADAM SMÓLSKI

Ukraiński Konkurs Fizyczny „Lwiątko” (por. informacje w poprzednim numerze „Fizyki w Szkole”) odbył się na Ukrainie 13 kwietnia. W tym samym dniu zainaugurowana została polska edycja Konkursu – na razie próbnie, w dziesięciu szkołach w Polsce. Zawody, zorganizowane na wzór matematycznego „Kangura”, koordynowało I SLO na ul. Bednarskiej w Warszawie.

Łącznie do konkursu przystąpiło 314 uczniów: 102 z klas 1–2 gimnazjum, 28 z klasy 3 gimnazjum, 68 z klasy I liceum, 64 z klasy III liceum i 52 z klasy IV liceum. Dla każdej z wymienionych pięciu kategorii przygotowany był inny zestaw zadań. Znajdą Państwo tutaj zadania dla klasy 3 gimnazjum i IV liceum, wraz z rozwiązaniami. Pozostałe w następnych numerach „Fizyki w Szkole”.

Zadania (w większości oryginalne z Ukrainy) były trudne, stąd nie należy się dziwić ogólnie niewysokim wynikom. Średnia liczba punktów wszystkich 314 uczestników to 62 punkty (przy maksymalnych 150), a mediana 60 punktów. Tym większe uznanie należy się zawodnikom, którzy uzyskali lepszy rezultat.

Postanowiliśmy nagrodzić wszystkich uczestników, którzy uzyskali nie mniej niż 75 punktów – łącznie 69 osób. Otrzymują dyplomy i książki oraz jako prezent od WSiP S.A. plakaty „Cząstki elementarne i oddziaływania”. Dziesięć książek podarowało wydawnictwo Adamantan.

Oto czołówka zawodników (otrzymują *Encyklopedię Szkolną. Fizyka z astronomią*):

- Wojciech Ekert z 3 klasy gimnazjum Zespołu Szkół Nr 2 im. Hugona Kołłątaja w Wałbrzychu; uzyskał 126,25 pkt.
- Krzysztof Pawłowski z klasy I Liceum im. Stanisława Staszica w Warszawie; uzyskał 123,75 pkt.
- Bartłomiej Kamiński z klasy 2 gimnazjum Zespołu Szkół nr 1 w Warszawie, ul. Staffa 3/5; uzyskał 120 pkt.
- Mateusz Kopeć z klasy 3 gimnazjum Zespołu Szkół nr 1 w Warszawie, ul. Staffa 3/5; uzyskał 118,75 pkt.
- Jerzy Orłowski z klasy IV Liceum im. Tadeusza Czackiego w Warszawie; uzyskał 117,5 pkt.
- Maciej Lis z klasy 2 gimnazjum przy VIII LO im. Władysława IV w Warszawie; uzyskał 115,5 pkt.

Składamy wyrazy uznania nauczycielom, którzy przygotowali uczniów do konkursu. Zapraszamy wszystkie szkoły w Polsce do udziału w Konkursie „Lwiątko” w przyszłym roku. Informacje na temat przyszłorocznego „Lwiątka” znajdą się w „Fizyce w Szkole” oraz na stronie internetowej Konkursu http://slo.bednarska.edu.pl/lwiatko – tam też można znaleźć zadania z ubiegłych lat i statystyki tegorocznego konkursu.