51 OLIMPIADA FIZYCZNA — ZAWODY I STOPNIA, CZĘŚĆ I
ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1

Wprowadźmy nastujące oznaczenia: masa Ziemi — $m_{\rm Z}$, masa Słońca — $m_{\rm S}$, promień Słońca — $R_{\rm S}$, okres obiegu Ziemi wokół Słońca — T, średnia odległość Ziemi od Słońca — L, stała grawitacyjna — G. Przyjmijmy dla uproszczenia, że orbita Ziemi jest okręgiem o promieniu L, a Słońce jest nieruchome. Siła przyciągania grawitacyjnego Ziemi i Słońca jest równa

$$F_G = G\frac{m_{\rm S} m_{\rm Z}}{L^2}. \tag{1}$$

Siła dośrodkowa jest równa sile przyciągania grawitacyjnego F_G. Mamy więc

$$F_G = m_{\rm Z} a = m_{\rm Z}\omega^2 L = m_{\rm Z}\frac{4\pi^2 L}{T^2}. \tag{2}$$

Przyspieszenie grawitacyjne mierzone na powierzchni Ziemi jest równe

$$g = G\frac{m_{\rm Z}}{R_{\rm Z}^2}. \tag{3}$$

Możemy teraz, podstawiając równanie (3) do równań (1) i (2), obliczyć stosunek masy Ziemi do masy Słońca

$$\frac{m_{\rm Z}}{m_{\rm S}} = \frac{g R_{\rm Z}^2 T^2}{L^3 4\pi^2} \tag{4}$$

Masę Ziemi oraz Słońca można wyrazić przez ich promienie i średnie gęstości $m_{\rm Z} = (4/3)\pi R_{\rm Z}^3 \rho_{\rm Z}$, $m_{\rm S} = (4/3)\pi R_{\rm S}^3 \rho_{\rm S}$. Kąt pod jakim widać tarczę Słońca z Ziemi jest równy $\alpha = 2R_{\rm S}/L$. Ostatecznie podstawiając powyższe wzory do równania (4) otrzymujemy

$$\frac{\rho_{\rm Z}}{\rho_{\rm S}} = \frac{gT^2}{4\pi^2 R_{\rm Z}}\frac{\alpha^3}{8}. \tag{5}$$

Odpowiedź: $\rho_{\rm Z}/\rho_{\rm S} = (gT^2/4\pi^2 R_{\rm Z})(\alpha^3/8) = 8,58$

Zadanie 2

Odpowiedź: Jest to wynik efektu cieplarnianego. Promieniowanie słoneczne, obejmujące przede wszystkim zakres widzialny widma, przechodzi przez szyby i powoduje ogrzanie wnętrza. Powierzchnia Słońca ma bardzo wysoką temperaturę, znacznie wyższą niż panuje we wnętrzu samochodu. W związku z tym widmo promieniowania termicznego Słońca ma maksimum przy znacznie większych częstościach niż widmo promieniowania termicznego przedmiotów znajdujących się w kabinie samochodu. W tym wypadku szyby samochodu działają jak filtr górnoprzepustowy. Natomiast promieniowanie w zakresie podczerwonym widma, emitowane przez rozgrzane wnętrze kabiny, nie może wydostać się przez szyby. W bagażniku efekt cieplarniany nie zachodzi, a więc temperatura w kabinie jest wyższa niż w bagażniku.

Zadanie 3

Rozważmy drgania o amplitudzie tak małej, że prędkość kątowa wahadła pozostaje stale mniejsza od prędkości obrotu osi. Wtedy w przypadku 1) dodatnia praca sił tarcia w jednej połowie okresu będzie się dokładnie kompensować z ujemną pracą tej siły w drugiej połowie, czyli energia wahań i amplituda drgań pozostają niezmienione. Analiza przypadku 2) prowadzi do wniosku, że moment hamujący ruch wahadła w fazie odchylenia od położenia równowagi jest większy, niż moment rozpędzający podczas powrotu; stąd otrzymujemy drgania gasnące. Na podstawie podobnego rozumowania wnioskujemy, że w przypadku 3) wystąpią drgania samowzbudne.

Zadanie 4

Na sanki działają następujące siły: siła ciężkości $\vec{G}$, siła reakcji podłoża $\vec{N}$, siła tarcia $\vec{T}$ i siła $\vec{F}$ (siła z jaką sznurek działa na sanki). Jeśli sanki poruszają się ruchem jednostajnym, to suma wszystkich przyłożonych sił jest równa zeru

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{T} = 0. \tag{1}$$

Aby rozwiązać równanie wektorowe (1), zrzutujmy je na dwa wzajemnie prostopadłe kierunki: równoległy i prostopadły do powierzchni stoku. Otrzymujemy wówczas

$$F\cos\beta - T - G\sin\alpha = 0 \tag{2}$$

$$F\sin\beta + N - G\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Rozwiązanie zadania wymaga zbadania zależności wartości siły F od kąta β. Należy zatem z równań (2) i (3) wyeliminować N i T, przy czym te siły są związane ze sobą poprzez równanie $T = \mu N$. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy

$$F = G\,\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}. \tag{4}$$

Ponieważ licznik tego wyrażenia nie zależy od β, siła F będzie najmniejsza, gdy mianownik osiąga maksimum. Należy więc znaleźć kąt β, dla którego pochodna mianownika wyrażenia w równaniu (4) będzie równa zeru. Zachodzi to dla kąta $\beta = \operatorname{arctg}\mu$.
Odpowiedź: $\beta = \operatorname{arctg}\mu$ oraz $F = G\,\sin(\alpha+\beta) = G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/\sqrt{1+\mu^2}$.

Zadanie 5

Najprościej jest rozwiązać to zadanie w układzie związanym z poruszającym się rowerem. Umieśćmy środek układu współrzędnych w środku jednego z kół, a oś x skierujmy równolegle do kierunku jazdy. Wybierzmy na obwodzie koła jakiś punkt. Jego współrzędne w chwili t są dane przez $x(t) = -(R/2)\cos\omega t$ oraz $y(t) = (R/2)\sin\omega t$, gdzie $\omega = 2V/R$. Składowe jego prędkości są równe $v_x(t) = (R/2)\omega\sin\omega t = V\sin\omega t$ i $v_y(t) = (R/2)\omega\cos\omega t = V\cos\omega t$. Są to jednocześnie składowe początkowej prędkości odrywającej się kropli, jeśli to oderwanie nastąpi w chwili t. Po oderwaniu się od koła roweru ruch kropli odbywa się według zasad rzutu ukośnego. Pionowa składowa prędkości v_y określa jak wysoko (w stosunku do punktu oderwania) wzniesie się kropla. W najwyższym punkcie trajektorii kropli pionowa składowa jej prędkości jest równa zeru. Z zasady zachowania energii otrzymujemy niezależny od masy kropli warunek $(1/2)v_y^2 = gh$, co daje

$$h = \frac{V^2\cos^2\omega t}{2g}\,. \tag{1}$$

Aby obliczyć wysokość tego punktu w stosunku do powierzchni szosy należy jeszcze dodać współrzędną y punktu oderwania się kropli, a zatem całkowita wysokość wynosi

$$H = \frac{V^2\cos^2\omega t}{2g} + \frac{R}{2}\sin\omega t = \frac{V^2}{2g}(1-\sin^2\omega t) + \frac{R}{2}\sin\omega t, \tag{2}$$

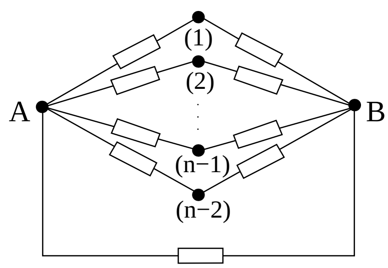
a więc jest kwadratową funkcją parametru $\sin(\omega t)$. Maksymalna wysokość $H_{\max}$ jest równa $H_{\max} = (1/2)[(gR^2)/(4V^2) + V^2/g] = 1,85\,\mathrm{m}$.

Zadanie 6

Rozpatrzmy schemat pomocniczy przedstawiony na rysunku 8. Zaciski A i B są połączone ze sobą opornikiem o oporze R, a pozostałe $n-2$ zaciski są połączone z zaciskami A i B takimi samymi opornikami o oporze R, ale nie są połączone między sobą. Opór zastępczy tego układu R_{AB}, czyli opór pomiędzy zaciskami A i B, będzie zatem równy

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R} = \frac{n}{2R}. \tag{1}$$

Zauważmy następnie, że z symetrii układu wynika, że jeśli między zaciskami A i B

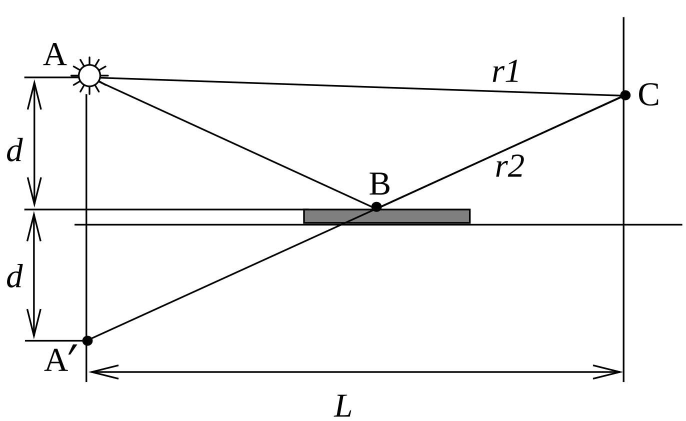


rys. 8

zostanie przyłożona pewna różnica potencjałów, to potencjały pozostałych $n-2$ zacisków będą sobie równe. A zatem, jeśli teraz połączymy dodatkowymi opornikami każdy z tych $n-2$ zacisków ze wszystkimi pozostałymi $n-3$ zaciskami (bo z zaciskami A i B są one już połączone), to w żadnym z tych dodatkowych oporników prąd nie będzie płynąć. W konsekwencji opór całego układu nie ulegnie zmianie. Po wykonaniu dodatkowych połączeń nasz układ staje się równoważny układowi, o którym mowa w zadaniu. Zatem opór zastępczy pomiędzy dowolnymi dwoma zaciskami jest równy $R_{\mathrm{AB}} = 2R/n$.

Zadanie 7

Obraz na ekranie powstaje w wyniku interferencji promienia padającego na ekran bezpośrednio ze źródła oraz promienia padającego po odbiciu od zwierciadła. Na rysunku 9 pokazano bieg dwóch przykładowych promieni $r1$ i $r2$. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku 9 — A odpowiada położeniu źródła światła, B odpowiada punktowi odbicia



rys. 9

promienia $r1$ od powierzchni zwierciadła, a C punktowi, w którym promienie $r1$ i $r2$ interferują na ekranie. Dodatkowo oznaczmy przez A$'$ punkt stanowiący odbicie punktu A względem płaszczyzny zwierciadła. Łatwo pokazać, że punkt A$'$ leży na prostej przechodzącej przez punkty B i C. Oznacza to, że możemy interferencję promieni padających bezpośrednio na ekran oraz odbitych od zwierciadła zastąpić poprzez interferencję dwóch promieni wychodzących z dwóch źródeł odległych o $2d$, gdzie d jest odległością źródła od płaszczyzny zwierciadła. Teraz już zadanie staje się bardzo proste, ponieważ możemy posługiwać się wynikami klasycznego eksperymentu Younga. W przypadku, gdy $L \gg d$, odległość pomiędzy kolejnymi maksimami w obrazie interferencyjnym jest równa

$$\Delta x = (\lambda L)/(2d) \; , \tag{1}$$

gdzie λ oznacza długość światła emitowanego przez źródło. Po odsunięciu źródła światła od płaszczyzny zwierciadła, nowa odległość kolejnych maksimów wyniesie

$$\frac{\Delta x}{N} = \frac{\lambda L}{2d + 2d_0} \; . \tag{2}$$

Podstawiając do równania (2) wartość d obliczoną z równania (1) otrzymujemy $\lambda = (2d_0 \Delta x)/(L(N-1)) = 1,2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$.
Uwaga: Ze względu na podany w treści zadania warunek $d \ll L$, tylko oddalanie źródła w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zwierciadła powoduje przesuwanie prążków interferencyjnych.

Zadanie 8

Wybierzmy oś x wzdłuż kierunku drgań, a punkt $x = 0$ w położeniu równowagi. Podczas odchylenia kulki w lewo ($x < 0$) gumka rozciąga się i na kulkę działają siły sprężystości gumki oraz sprężynki. Zatem na półosi $x < 0$ ruch kulki jest opisany równaniem

$$Ma = -Kx - Kx. \tag{1}$$

Możemy to równanie przekształcić do postaci

$$a + \omega_0^2 x = 0, \tag{2}$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{(2K)/M}$. Jego rozwiązaniem są drgania harmoniczne o częstości ω_0. W obszarze $x > 0$, gumka nie wywiera na kulkę żadnej siły. Wtedy kulka porusza się tylko pod wpływem siły sprężystości sprężynki. Taki ruch jest opisany równaniem

$$a + \omega_1^2 x = 0, \tag{3}$$

gdzie $\omega_1 = \sqrt{K/M}$. Okres T, podczas którego dokonuje się pełny cykl niesymetrycznych oscylacji składa się z półokresów dwóch drgań harmonicznych o częstościach ω_0 i ω_1. Zachodzi wówczas

$$T = \pi \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} \right). \tag{4}$$

Zadanie 9

Odpowiedź: Ciężar barki rozkłada się na dno całego kanału, a więc obciążenie przęseł mostu nie zmieni się w wyniku pojawienia się barki, niezależnie od tego jaki wiezie ona ładunek. Stwierdzenie to jest słuszne tak długo jak długo ruch barki jest wystarczająco powolny, aby nie spowodował spiętrzenia wody.

Zadanie 10

Poprawna jest odpowiedź (a). Pole elektryczne pochodzące od nieskończonej jednorodnie naładowanej płaszczyzny jest jednakowe w całej przestrzeni. Na naładowaną kulkę działa stała siła pochodząca od pola elektrycznego oraz stała siła ciężkości. Obie te siły równoważą się w każdym punkcie przestrzeni. A zatem wypadkowa siła działająca na kulkę jest równa zero i tor jej ruchu będzie linią prostą.
Uwaga: W zadaniu jest mowa o rozległej płaszczyźnie. Nie jest to sformułowanie jednoznaczne. W rozwiązaniu przyjęliśmy, że płaszczyzna jest nieskończona i zaniedbaliśmy efekty brzegowe. W przypadku naładowanej powierzchni o skończonych rozmiarach uwzględnienie brzegów daje nieznaczne zmniejszanie się natężenia pola z wysokością; ruch kulki jest wtedy złożeniem drgań pionowych z ruchem jednostajnym w poziomie. A zatem odpowiedź e) z prawidłowym uzasadnieniem jest także poprawna.

Zadanie 11

Wprowadźmy następujące oznaczenia: R_1, R_2 — promienie kulek, T_1, T_2 — ich temperatury końcowe, r — odległość ich środków, σ — stała Stefana-Boltzmanna. Energia promieniowania elektromagnetycznego absorbowanego w jednostce czasu przez małą kulkę musi być po długim czasie taka sama, jak energia promieniowania emitowanego. Duża kula emituje w jednostce czasu $4\pi {R_1}^2 \sigma {T_1}^4$ energii. Energia absorbowana przez małą kilkę jest w przybliżeniu ułamkiem $\pi {R_2}^2/(4\pi r^2)$ tej wielkości. Mała kulka emituje $4\pi {R_2}^2 \sigma {T_2}^4$ energii na jednostkę czasu . Z równania równowagi

$$4\pi {R_1}^2 \sigma {T_1}^4 \times \frac{\pi {R_2}^2}{4\pi r^2} = 4\pi {R_2}^2 \sigma {T_2}^4 \tag{1}$$

otrzymujemy wartość temperatury małej kulki równą $T_2 = T_1\sqrt{R_1/2r} = 400$ K. Zauważmy, że ta temperatura nie zależy od promienia małej kulki, w granicach przyjętego przybliżenia.

Zadanie 12

Oznaczmy objętość części kulki zanurzonej w cieczy o gęstości γ_1 przez V_1, a objętość pozostałej części przez V_2, przy czym $V = V_1 + V_2$. Ponieważ kulka znajduje się w stanie równowagi, jej ciężar jest zrównoważony przez siłę wyporu, przy czym ta ostatnia składa się z dwóch części $V_1\gamma_1$ oraz $V_2\gamma_2$. Zatem

$$V_1\gamma_1 + V_2\gamma_2 = V_1\gamma_1 + (V - V_1)\gamma_2 = (V - V_2)\gamma_1 + V_2\gamma_2 = V\gamma. \tag{1}$$

Możemy stąd wyznaczyć V_1

$$V_1 = V\frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_2 - \gamma_1} \tag{2}$$

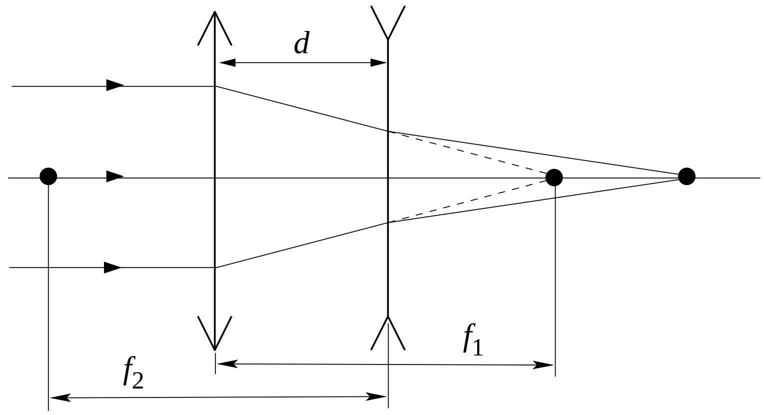
oraz V_2

$$V_2 = V\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}. \tag{3}$$

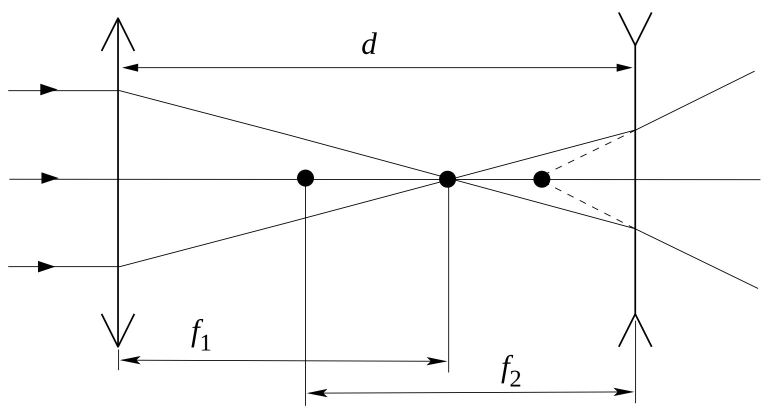
Gdy $\gamma \to \gamma_1$ wówczas $V_1 \to V$ oraz $V_2 \to 0$. Podobnie, gdy $\gamma \to \gamma_2$ to $V_1 \to 0$ oraz $V_2 \to V$.

Zadanie 13

Odpowiedź: W przypadku, gdy odległość d pomiędzy soczewkami jest bardzo mała, wiązka równoległa pozostanie w przybliżeniu równoległa po przejściu przez układ. Gdy odległość pomiędzy soczewkami jest porównywalna z długościami ogniskowych f_1 i f_2 soczewek (rys. 10a), ale mniejsza od nich, to wiązka wychodząca jest zbieżna. Natomiast w przypadku, gdy odległość pomiędzy soczewkami jest większa niż długość ich ogniskowych (rys. 10b) wiązka wychodząca będzie rozbieżna.



rys. 10a



rys. 10b

Zadanie 14

Ciśnienie atmosferyczne p, działające na powierzchnię rtęci w otwartym naczyniu określamy na podstawie warunku równowagi cieczy w naczyniach połączonych

$$p = hdg, \tag{1}$$

gdzie d jest gęstością rtęci, g — przyspieszeniem ziemskim, h — różnicą poziomów w rurce i naczyniu otwartym. Zaniedbujemy ciśnienie pary nasyconej w rurce oraz zjawisko menisku. Rozszerzalność cieplna skali barometru powoduje, że tylko w temperaturze $T_0 = 0^\circ$ C jedna podziałka skali odpowiada naprawdę 1 mm Hg. W innej temperaturze T odczytana na skali liczba $h^{'}$, odpowiadająca rzeczywistej wysokości słupka rtęci, będzie różna od h. Obie liczby są powiązane wzorem

$$h = h^{'}(1 + \lambda\Delta T)\ , \tag{2}$$

gdzie λ jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej mosiężnej skali, a $\Delta T = T - T_0$. Także występująca we wzorze (1) gęstość rtęci jest funkcją temperatury

$$d = \frac{d_0}{1 + \alpha \Delta T} \ , \tag{3}$$

gdzie d_0 jest gęstością rtęci w temperaturze 0° C, a α jest współczynnikiem objętościowej rozszerzalności rtęci. Podstawiając h i d do wzoru (1) otrzymujemy ostatecznie

$$p = h^{'} d_0 g \frac{1 + \lambda \Delta T}{1 + \alpha \Delta T} \ . \tag{4}$$

Zatem w temperaturze 0° C barometr wskazywałby ciśnienie równe

$$h_0 = h^{'} \frac{1 + \lambda \Delta T}{1 + \alpha \Delta T} \ , \tag{5}$$

to znaczy 757,7 milimetrów słupka rtęci.

Zadanie 15

Zauważmy, że skoro w obwodzie pokazanym na rysunku nie płynie prąd na odcinkach AB i BC, to nie będzie również płynął prąd na odcinku BD. Na odcinku BD nie ma żadnych źródeł siły elektromotorycznej, zatem $U_{\mathrm{B}} = U_{\mathrm{D}}$, gdzie U_{B} i U_{D} oznaczają wartość potencjału w punktach B i D. Na odcinku ACD prąd płynie od A do D. Stąd wniosek, że $U_{\mathrm{A}} > U_{\mathrm{D}}$ oraz $U_{\mathrm{C}} > U_{\mathrm{D}}$, czyli również $U_{\mathrm{A}} > U_{\mathrm{D}} = U_{\mathrm{B}}$. Zgodnie z założeniami zadania, na odcinku AB nie płynie prąd, a zatem różnica potencjałów $(U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}})$ jest wywołana wyłącznie działaniem siły elektromotorycznej ogniwa $\mathcal{E}_1$. Wnioskujemy stąd, że biegun dodatni tego ogniwa jest od strony A. Równocześnie $U_{\mathrm{C}} > U_{\mathrm{B}}$ i na podstawie identycznych argumentów wnioskujemy, że biegun dodatni ogniwa $\mathcal{E}_2$ musi być od strony C. Poprawna jest odpowiedź a).