IX OLIMPIADA FIZYCZNA (1959/1960). Stopień III, zadanie doświadczalne – D.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Aniela Nowicka: Olimpiady Fizyczne IX i X. PZWS, Warszawa 1965 (str. 62 – 69).

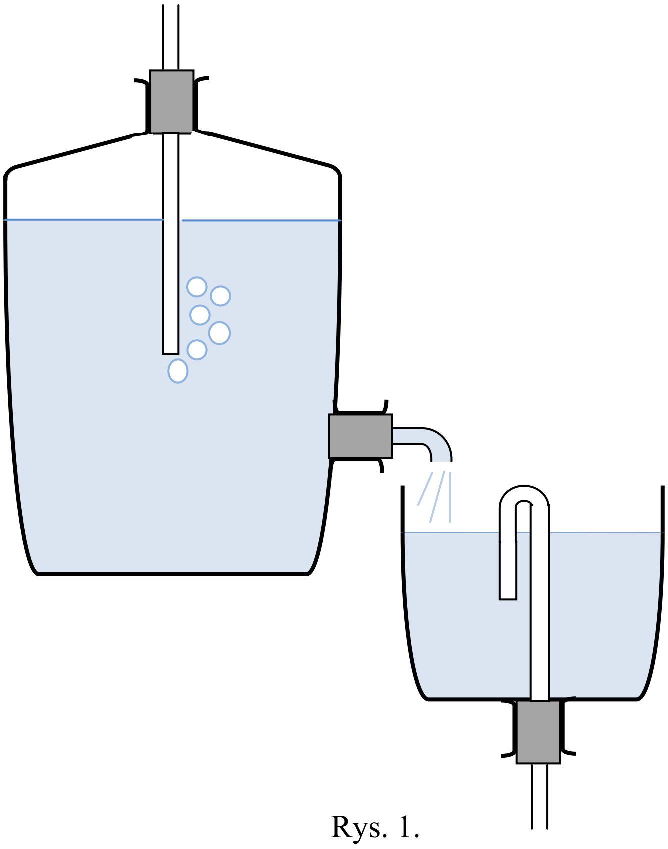
Nazwa zadania: Badanie wypływu wody z lewara i naczynia Mariotte'a.

Działy: Mechanika płynów.

Słowa kluczowe: lewar, butelka, naczynie Mariotte'a, ciśnienie hydrostatyczne, efektywne, słup wody, prędkość, wzór Torricellego, częstość, okres, wypływ wody, analogia, elektryczne drgania relaksacyjne.

Zadanie doświadczalne – D, zawody III stopnia, IX OF.

Do naczynia z lewarem można wlewać wodę z butli, regulując prędkość wypływu zmianą głębokości zanurzenia rurki (rys.1).



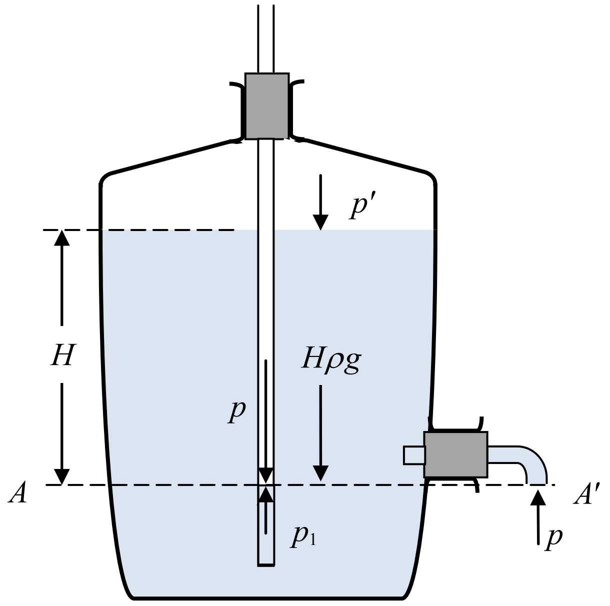
Rys. 1.

Napełnij naczynie wodą i obserwuj poziom wody w naczyniu. Wyjaśnij działanie urządzenia oraz przebieg obserwowanego zjawiska. Powtórz doświadczenie kilkakrotnie i sporządź wykres zależności wysokości poziomu wody w naczyniu od czasu. Od czego zależeć będzie częstość wypływu wody?

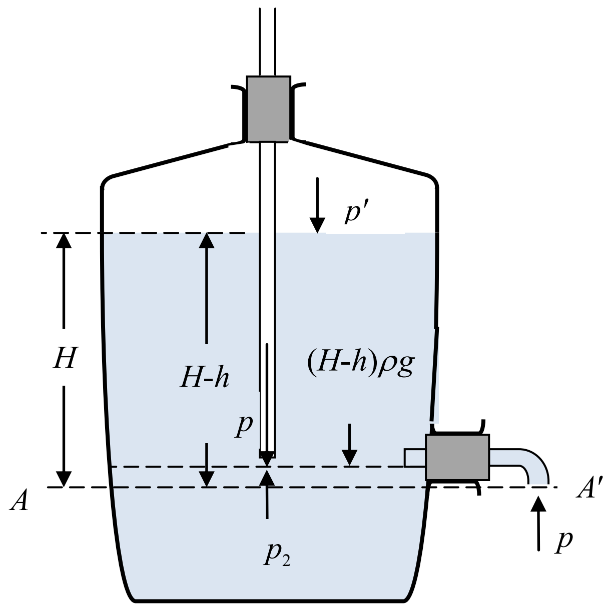
Rozwiązanie

Część teoretyczna

Zanim przystąpimy do właściwego rozwiązania zadania, zajmiemy się najpierw pierwszą częścią przygotowanego zestawu eksperymentalnego, która pozwala, jak to wynika z tekstu, na regulowanie prędkości wypływu wody z butli. Jest to proste urządzenie, zwane często butelką Mariotte'a.



Rys. 2.



Rys. 3.

Wyobraźmy sobie (rys. 2) słój ze zwężoną szyjką, zaopatrzoną w szczelny korek z przeprowadzoną pionową rurką. Rurką tę można przesuwać w korku w górę i w dół z zachowaniem szczelności.
W dolnej części słoja znajduje się dodatkowa szyjka (tzw. tubus), również zatkana korkiem z przeprowadzoną rurką, którą będziemy dalej nazywać rurka odpływową. Załóżmy dalej, że w słoju znajduje się woda, przy czym jej powierzchnia swobodna pozostaje na wysokości H ponad poziomem zewnętrznego otworu rurki odpływowej.

Rozpatrzymy dwa przypadki, z których pierwszy przedstawia właśnie rysunek 2. Rurka pionowa została tak opuszczona, że jej dolny koniec leży poniżej poziomu otworu rurki odpływowej. Łatwo się chyba domyślić, że w takim przypadku menisk wody w rurce pionowej ustali się również na poziomie $A - A'$. Na meniski wody w obu rurkach działa takie samo ciśnienie atmosferyczne p, równoważone przez ciśnienie p_1, będące sumą ciśnienia p', panującego w górnej części butli ponad swobodną powierzchnią wody i ciśnienia hydrostatycznego słupa wody o wysokości H. Mamy więc tutaj

$$p' + \rho g H = p_1 = p, \tag{1}$$

gdzie ρ jest gęstością wody, g zaś stała przyspieszenia ziemskiego.

Wyobraźmy sobie teraz, że rurka pionowa została przesunięta w korku w górę tak, że dolny jej koniec znajduje się o h cm ponad poziomem $A - A'$. Ten przypadek przedstawiony został na rysunku 3. Tym razem równowaga ciśnień nie będzie zachowana. Rozpatrzmy w dolnym wylocie pionowej rurki. Z góry działa ciśnienie atmosferyczne p, z dołu zaś ciśnienie p_2 mniejsze od p_1, choć bowiem ciśnienie p' pozostało w pierwszym momencie niezmienione, to jednak ciśnienie hydrostatyczne jest mniejsze ze względu na zmniejszenie się wysokości słupa wody. Mamy teraz:

$$p' + \left(H - h\right)\rho g = p_2 < p\,. \tag{2}$$

W wyniku tego przez rurkę pionową zacznie się wdzierać powietrze pod postacią baniek gromadzić w górnej części naczynia. Dalszym skutkiem będzie wypieranie cieczy z naczynia, która zacznie się wylewać rurka odpływową.

Znajdziemy teraz efektywne ciśnienie p_{ef}, wywołujące ostatecznie wypływanie wody przez boczną rurkę. Jest ono oczywiście równe różnicy ciśnień p_1 i p_2:

$$p_{\text{ef}} = p_1 - p_2 = p' + H\rho g - \left[p' + (H-h)\rho g\right],$$

czyli

$$p_{\text{ef}} = \rho g h. \tag{3}$$

Doszliśmy do bardzo istotnego wniosku. Oto w uzyskanym wyrażeniu (3) na ciśnienie efektywne nie występuje wcale *H*, czyli początkowa wysokość słupa wody w naczyniu. Ciśnienie efektywne jest stałe aż do chwili, gdy opadający poziom wody w naczyniu nie osiągnie dolnego wylotu pionowej rurki. Ciśnienie to, jak widzimy, jest równe ciśnieniu hydrostatycznemu nie całego słupa wody, a jedynie jego części zawartej między poziomami wylotów obu rurek.

Dalszy płynący stąd wniosek to stałość prędkości wypływu.
Stosując znany wzór Torricellego mamy:

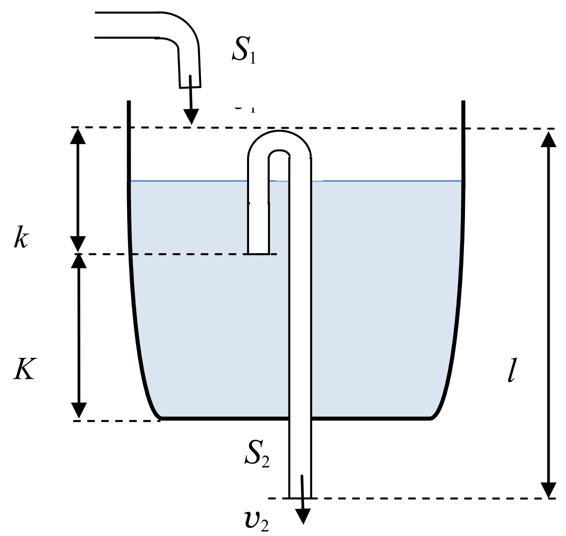
$$\upsilon = \sqrt{2gh}, \tag{4}$$

gdzie *h* jest stała różnicą między poziomami wylotów rurek.

Butelka Mariotte'a pozwala zatem, jak widzimy, uzyskiwać stałą prędkość wypływu cieczy z naczynia i to z możliwością regulacji w pewnych granicach tej prędkości przez proste dobieranie wartości *h*.

Teraz znając działanie butelki Mariotte'a, przejdziemy do rozważań nad tym, co się dzieje w naczyniu z lewarem, gdy z rurki odpływowej butli wpływać będzie do niego woda strumieniem o stałej prędkości.

Obserwator stwierdzi z łatwością, że gdy poziom wody podnosząc się w naczyniu osiągnie górne zagięcie lewara, nastąpi wypływ wody przez lewar. Jeśli prędkość uchodzenia wody przez lewar jest przy tym większa niż dopływ z butelki Mariotte'a, swobodna powierzchnia wody opadnie do poziomu otworu wlotowego rurki lewara. W tym momencie przepływ wody przez lewar ustanie i poziom zacznie się znowu podnosić dzięki nieustannemu dopływowi z butli. Zjawisko to powtarzać się będzie periodycznie, a powierzchnia swobodna wody w naczyniu będzie oscylować między poziomem górnego kolanka lewara a jego otworem wlotowym.



Rys. 4.

Powtarzając eksperyment przy różnych położeniach rurki regulacyjnej w butelce Mariotte'a stwierdzimy, że okres powtarzającego się zjawiska zależy od wartości *h* (rys. 4), czyli tym samym od prędkości wody napływającej do naszego naczynia. Wykreślenie zależności wysokości poziomu cieczy w naczyniu z lewarem od czasu wykazuje, że choć jest to funkcja periodyczna, to jednak najzupełniej odbiega od typów funkcji periodycznych, do jakich przywykł uczeń w czasie nauki szkolnej. Wykres przedstawia linie łamaną podobną do ostrza piły o niesymetrycznych zębach.

Do takich wniosków prowadzi obserwacja. Postaramy się jednak zjawisko to wyjaśnić i uzasadnić nieco ściślej. W tym celu posłużymy się schematycznym rysunkiem naczynia z lewarem (rys. 4).

Załóżmy, że z butelki Mariotte'a wlewa się woda do naszego naczynia przez rurkę o przekroju s_1 z prędkością υ_1. Na jednostkę czasu dopływa zatem objętość wody równa $\upsilon_1 s_1$. Obliczymy najpierw czas potrzebny na to, by powierzchnia swobodna wody podniosła się na wysokość K, czyli do poziomu otworu wlotowego lewara.
Czas ten wyniesie:

$$t_1 = \frac{KS}{\upsilon_1 s_1} = \frac{KS}{s_1\sqrt{2gh}}, \tag{5}$$

gdzie S jest przekrojem naczynia. W podobny sposób obliczamy czas podnoszenia się powierzchni swobodnej wody od poziomu otworu wlotowego do kolanka lewara. Wyniesie on

$$t_2 = \frac{kS}{\upsilon_1 s_1} = \frac{kS}{s_1\sqrt{2gh}}. \tag{6}$$

Całkowity czas podnoszenia się wody w naczyniu od początku doświadczenia będzie zatem

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{\upsilon_1 s_1}\left(K + k\right). \tag{7}$$

Od tej chwili poziom wody w naczyniu przestaje się podnosić, napełnia się kolanko, potem prawe ramię lewara i równowaga zostaje zachwiana. Wskutek ciśnienia hydrostatycznego w prawym ramieniu lewara, wynoszącego $l\rho g$, rozpoczyna się wylewanie wody przez lewar z prędkością równą w pierwszej chwili

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gl}. \tag{8}$$

Ściśle biorąc, wzór (8) jest słuszny jedynie „w pierwszej chwili". Jeżeli poziom w naczyniu zacznie się obniżać, to i ciśnienie hydrostatyczne w dłuższym ramieniu lewara, wywołujące wylewanie się wody, będzie malało. Wielkość l występująca we wzorze (8) nie jest przecież długością lewara, ale różnica poziomów miedzy powierzchnią swobodną wody w naczyniu a dolnym otworem prawego ramienia lewara. Jeżeli jednak lewe ramię lewara jest znacznie krótsze od prawego, jak też i jest w istocie, czyli gdy zachodzi warunek:

$$k \ll l, \tag{9}$$

możemy zagadnienie uprościć zakładając, że prędkość strumienia wody przelewającej się przez lewar jest stała i wyraża się wzorem (8). Przy takim zaś założeniu łatwo obliczyć, jaka objętość wody wypływa w jednostce czasy przez lewar.
Wynosi ona

$$\upsilon_2 s_2 = s_2\sqrt{2gl}. \tag{10}$$

Mogą obecnie zajść trzy możliwości:

1. $\upsilon_1 s_1 > \upsilon_2 s_2$. Więcej przybywa wody do naczynia niż uchodzi przez lewar. Poziom wody w naczyniu podnosi się dalej, tyle tylko, że wolniej.

2. $\upsilon_1 s_1 = \upsilon_2 s_2$. Powierzchnia swobodna wody utrzymuje się stale na wysokości kolanka lewara.

3. $\upsilon_1 s_1 < \upsilon_2 s_2$. Ten przypadek jest najciekawszy i nim zajmiemy się dokładniej.

Ponieważ więcej wody ubywa przez lewar niż przybywa z butelki Mariotte'a, przeto poziom wody obniża się aż do otworu wlotowego lewara. Z lewara spływa woda a zostaje zassane powietrze. Od tego momentu znowu poziom w naczyniu podnosi się by po upływie czasu t_2 (wzór 6) osiągnąć kolanko lewara. Postaramy się obecnie oszacować czas t_3 – obniżania się poziomu wody w naczyniu wskutek wypływania wody przez lewar. Ponieważ wpływa na jednostkę czasu objętość $v_1 s_1$ a uchodzi $v_2 s_2$, przeto ubywa z naczynia

$$v_2 s_2 - v_1 s_1 = s_2\sqrt{2gl} - s_1\sqrt{2gl}\,.$$

Stąd mamy natychmiast

$$t_3 = \frac{kS}{\sqrt{2g}\,(s_2\sqrt{l} - s_1\sqrt{h})}\,. \tag{11}$$

Teraz już bardzo łatwo znajdziemy okres T naszych oscylacji korzystając z wzorów (6) i (11):

$$T = t_2 + t_3 = \frac{kS}{s_1\sqrt{2gh}} + \frac{kS}{\sqrt{2g}\,(s_2\sqrt{l} - s_1\sqrt{h})}\,. \tag{12}$$

Część doświadczalna

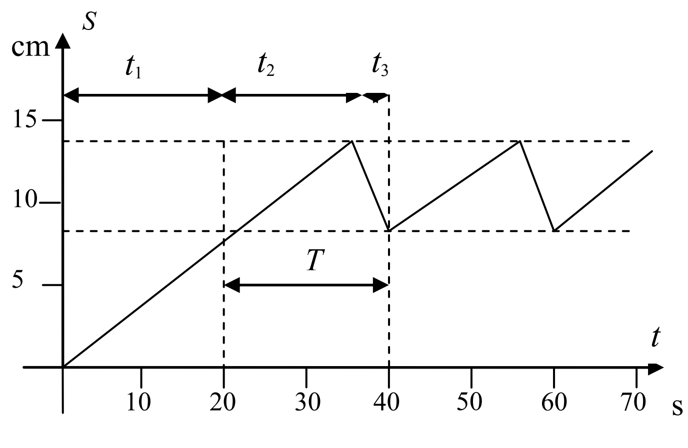
Układy eksperymentalne dostarczone zawodnikom nie były identyczne. Różniły się zwłaszcza w rozmaitych okręgach Olimpiady Fizycznej, były przecież przygotowywane przez różne zespoły ludzi i z różnego materiału. Można jednak przyjąć pewne średnie wartości: $k = 6$ cm, $l = 30$ cm, $s_1 = 0{,}3$ cm^2, $s_2 = 0{,}8$ cm^2, $S = 80$ cm^2, $K = 8$ cm^2. Dla tych przeciętnych wartości i przykładowo wybranego $h = 5$ cm obliczamy okres oscylacji T i czas pierwszego napełnienia t_1 oraz sporządzimy wykres.

Ze wzorów (12) i 5 mamy:

$$T = \frac{6\cdot 80}{0{,}3\sqrt{2000\cdot 5}}\,\mathrm{s} + \frac{6\cdot 80}{\sqrt{2000}\left(0{,}8\sqrt{30} - 0{,}3\sqrt{5}\right)}\,\mathrm{s} \cong 16\,\mathrm{s} + 2{,}9\,\mathrm{s} = 18{,}9\,\mathrm{s},$$

$$t_1 = \frac{8\cdot 80}{0{,}3\sqrt{2000\cdot 5}}\,\mathrm{s} \cong 21{,}3\,\mathrm{s}\,.$$

Rysunek 5 przedstawia przebieg poszukiwanej zależności. Otrzymany wykres nie odzwierciedla jednak wiernie prawdziwego przebiegu procesu. Jest on nieco wyidealizowany. W rachunkach naszych poczyniliśmy szereg uproszczeń. Jednym z nich było przyjęcie, że v_2 = constans wypływające z założenia (9).



Rys. 5.

W rzeczywistości prędkość v_2 w miarę trwania wypływu wody przez lewar stopniowo, choć nieznacznie, maleje. Stąd wniosek, że krótsze, opadające odcinki naszej linii łamanej, w istocie rzeczy, nie są odcinkami prostoliniowymi. Na rysunku linia przerywana przedstawia przebieg bardziej zbliżony do prawdziwego.

W naszym rozumowaniu przyjęliśmy także jeszcze inne uproszczenia. Oto pominęliśmy szczególnie trudne do ścisłego ujęcia procesy zachodzące w momentach napełniania się lewara, gdy poziom wody podnosi się i dochodzi do kolanka, oraz gdy opada i osiąga otwór wlotowy lewara. Tym momentom odpowiadają na wykresie punkty załamania. W procesach tych odgrywa role cały szereg czynników, takich jak zwilżanie, napięcie powierzchniowe, kształt menisku, lepkość, kształt kolanka lewara i inne. Te rozmaite czynniki komplikują przebieg procesów i wywołują miedzy innymi „złagodzenie" ostrych załamań na wykresie w postaci zaokrągleń, które występują szczególnie wtedy, gdy lewar jest wykonany z nieco grubszej rurki. Uczniowie wykonywali wykres w oparciu o dane pomiarowe. Mierzyli oni wysokość poziomu wody w naczyniu w rozmaitych fazach zjawiska za pomocą linijki oraz czas, posługując się stoperem. Ci z nich, którzy dokonywali pomiarów szczególnie starannie, uzyskali na swych wykresach wspomniane wyżej zaokrąglenia załamań.

Pozostało nam do omówienia, jakie czynniki wpływają na długość okresu, czy też, inaczej mówiąc, na częstość naszych oscylacji. Na podstawie wzoru (12) stwierdzamy przede wszystkim, że okres jest wprost proporcjonalny do długości krótkiego ramienia lewara k oraz do przekroju S naczynia. Zależny on jest jednak i od innych czynników. Są nimi przekroje rurek s_1 i s_2, długość l prawego ramienia lewara i wreszcie „efektywna różnica poziomów" h w butelce Mariotte'a. Ostatnie jednak cztery wyliczone parametry wpływają na oba składniki okresu t_2 i t_3 w różny sposób. Zmiana każdego z nich, prócz wpływu na okres, daje zmianę stosunku t_2/t_3, czyli zmienia tym samym kształt naszej linii łamanej, np. wzrost l nie wpływa na t_2, ale za to skraca t_3. Podobną własność posiada s_3.

Uczniowie mogli eksperymentalnie prześledzić jedynie wpływ h na wartość okresu. (Inne parametry były narzucone w gotowej konstrukcji urządzenia). Działanie tego parametru jest interesujące. Jego wzrost skraca t_2 a wydłuża t_3, tak jednak, że okres oscylacji ulega skróceniu (wzór 1). Dla przykładu obliczymy t_2, t_3 i T dla „efektywnej różnicy poziomów" w butelce Mariotte'a dwa razy większej:
$h = 10$ cm.

$$t_2 = \frac{6 \cdot 80}{0{,}3\sqrt{2000 \cdot 10}}\ \text{s} \cong 11{,}3\,\text{s},$$

$$t_3 = \frac{6 \cdot 80}{0{,}3\sqrt{2000 \cdot 10}(0{,}8\sqrt{30} - 0{,}3\sqrt{10})}\ \text{s} \cong 3{,}1\,\text{s},$$

$$T \approx 11{,}3\ \text{s} + 3{,}1\ \text{s} = 14{,}4\ \text{s}.$$

Widzimy, że t_2 zmalało z 16 s. na 11,3 s. a t_3 wzrosło z 2,9 s. do 3,1 s. Natomiast okres uległ skróceniu z 18,9 s. na 14,4 s. „Zęby piły" stały się bardziej symetryczne. Poziom wody w naczyniu w czasie oscylacji podnosi się szybciej, ale wylew przez lewar odbywa się nieco wolniej.

Zjawisko „oscylacji wodnych" występujących w tym zadaniu jest związane bardzo bliską analogią z tzw. elektrycznymi drganiami relaksacyjnymi – patrz np.: VII Olimpiada fizyczna, zad. dośw. III stopnia (Olimpiady fizyczne VII – VIII, PZWS, str. 66 – 75).