VII OLIMPIADA FIZYCZNA (1957/1958). Stopień II, zadanie doświadczalne – D

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Stefan Czarnecki: Olimpiady Fizyczne VII i VIII. PZWS, Warszawa 1964, str. 46 – 52.

Nazwa zadania: Wyznaczanie zależności $I(R)$ w obwodzie bateryjka płaska, oporniki oraz wielkości charakteryzujących bateryjkę.

Działy: Elektryczność

Słowa kluczowe: prawo Ohma, SEM, siła elektromotoryczna, opór wewnętrzny, natężenie prądu, obwód elektryczny, amperomierz, oporniki, wyłącznik, bateria, niepewność pomiarowa

Zadanie doświadczalne – D, zawody II stopnia, VII OF

Dana jest bateryjka płaska, zestaw znanych oporów, amperomierz o znanym oporze wewnętrznym i wyłącznik (klucz). Zbadaj, jak zmienia się natężenie prądu pobieranego z bateryjki w zależności od oporu włączonego w jej obwód.

Wyniki przedstaw w tabelce i na wykresie, biorąc jako współrzędne odwrotność natężenia prądu $\frac{1}{I}$ oraz włączony opór R.

Wskaż źródła niepewności pomiarowych.

Podaj teoretyczne wyjaśnienie otrzymanego wykresu. Na podstawie wykonanych pomiarów wyznacz wielkości charakteryzujące bateryjkę.

Rozwiązanie

Pracę zaczynamy od narysowania a następnie zestawienia obwodu. Łączymy w szereg, jak na Rys.1, bateryjkę, miliamperomierz, wyłącznik i jeden z oporów z kompletu dołączonego do zestawu doświadczalnego. Jeżeli mamy przyrząd wielozakresowy, należy przed zamknięciem obwodu zastanowić się, którym zakresem będziemy się posługiwać. Przez użycie niewłaściwego zakresu można zniszczyć przyrząd (wypadki takie zdarzyły się niestety w czasie zawodów). Wiemy, że SEM bateryjki płaskiej wynosi około 4,5 V, a najmniejszy z oporów dołączonych równy jest np. 30 Ω, przeto zgodnie z prawem Ohma największe natężenie prądu może wynieść

$$I = 4{,}5\ \mathrm{V}/30\ \Omega = 0{,}15\ \mathrm{A} = 150\ \mathrm{mA}.$$

W rzeczywistości natężenie prądu będzie mniejsze, pominęliśmy bowiem opór wewnętrzny bateryjki i miliamperomierza. Po wybraniu odpowiedniego zakresu przyrządu możemy przystąpić do właściwych pomiarów.

Włączamy w obwód kolejno wszystkie opory, jakimi dysponujemy w zestawie i starannie odczytujemy wartości natężenia prądu I. Dla każdego oporu dokonujemy kilku pomiarów i obliczamy wartości średnie. (Za każdym pomiarem wyłączamy klucz i włączamy go po raz drugi. Robimy to dlatego, ponieważ zdarza się, że wskutek tarcia w łożyskach przyrządu pomiarowego wskazówka niekiedy nie wraca dokładnie na to samo miejsce, dając niezupełnie powtarzalne wychylenia).

Dla przykładu posłużymy się wynikami pomiarów jednego z zawodników.

Uczeń dysponował miliamperomierzem o oporze wewnętrznym r_a = 0,21 Ω, pozwalającym na dokonywanie odczytów z dokładnością do 1 mA, oraz następującym zestawem oporów: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90 i 100 Ω. Tabelka podaje wartości natężenia prądu I dla każdego z tych oporów, otrzymane jako średnie z kilku pomiarów. W dolnym wierszu mamy już obliczone odwrotności natężenia prądu potrzebne do graficznego przedstawienia zależności

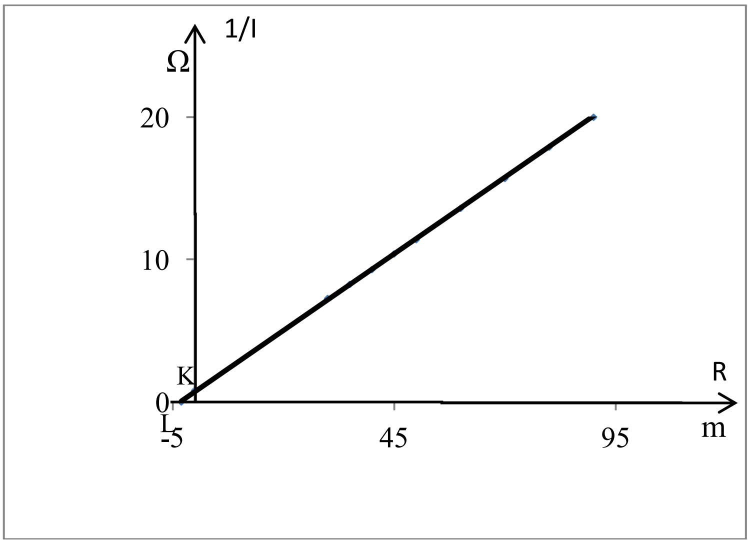
$$\frac{1}{I} = f(R) \tag{2}$$

zgodnie z zaleceniem podanym w tekście zadania.

Tabela 1.

R	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100	Ω
I	137,5	121,0	107,5	96,5	87,5	73,5	63,5	56,0	50,0	45,0	mA
$\frac{1}{I}$	7,27	8,26	9,30	10,4	11,4	13,6	15,7	17,9	20,0	22,5	A^{-1}

Rys.2 przedstawia graficznie przebieg funkcji. Na osi rzędnych zaznaczono wartości $\frac{1}{I}$ wyrażone w A^{-1}, a na osi odciętych naniesiono wartości oporu zewnętrznego R w Ω.



Rys. 2.

Punkty pomiarowe układają się, jak widzimy, zupełnie dobrze na linii prostej nie przechodzącej przez początek układu. Należałoby tu od razu podkreślić, że nie należy nigdy łączyć kolejno linią punktów pomiarowych, co prowadzi do linii łamanej! Tak niestety robiło wielu zawodników! Przecież każdy punkt będący wynikiem pomiaru czy szeregu pomiarów jest obarczony pewnym błędem przypadkowym, a więc punkty te nigdy nie leżą ściśle na krzywej czy prostej przedstawiającej daną zależność. Jednakże układ punktów, jaki otrzymaliśmy w naszym przypadku, sugeruje, że zależność $\frac{1}{I} = f(R)$ jest funkcją liniową. Zakładając, że tak jest istotnie, możemy przyłożyć linijkę i tak wykreślić prostą, by „rozrzut” punktów od tej prostej był jak najmniejszy.

Prócz błędów przypadkowych nasze punkty mogą być obarczone i błędami systematycznymi. Ten typ błędów jest z reguły trudniejszy do zidentyfikowania. W naszym przypadku głównym źródłem ewentualnych błędów systematycznych może być, i niewątpliwie jest, stopniowe wyczerpywanie się bateryjki w czasie wykonywania zadania. Daje to w wyniku zmniejszanie się siły elektromotorycznej E, a jednocześnie wzrost jej oporu wewnętrznego r.

Ci zawodnicy, którzy wykonywali pomiary mało sprawnie(długo trzymali zamknięty obwód), mają mniej dokładne wyniki. Jeśli używali oni przy tym oporów R wybieranych przypadkowo, a nie według wzrastających czy malejących wartości, otrzymali duży rozrzut punktów. Jeśli jednak brali opory kolejno, otrzymywali systematyczne odstępstwa od prostoliniowości(układy punktów, które „sugerują”, że zależność nie jest prostoliniowa). Z tych właśnie wyżej omówionych względów, pomiary należy wykonywać nie tylko starannie i dokładnie ale i szybko, jak najkrócej trzymając obwód zamknięty! Z tych samych względów organizatorzy zadania eksperymentalnego w zestawie oporów nie załączyli oporów mniejszych niż 20 Ω.

Po tej dygresji wróćmy do Rys.2. Jak już stwierdziliśmy, rysunek ten pokazuje, że funkcja $\frac{1}{I} = f(R)$ przedstawia linię prostą, przecinającą oś rzędnych w punkcie K, jest zatem funkcją liniową typu

$$y = a + bx$$

Wynik ten, uzyskany za pomocą wykresu, łatwo jest uzasadnić analitycznie.

Zgodnie z prawem Ohma dla całego obwodu możemy napisać

$$I = \frac{E}{r+R} \tag{2}$$

gdzie r niech oznacza sumę oporu wewnętrznego bateryjki r_{w} i oporu miliamperomierza r_{a}, a E – siłę elektromotoryczną bateryjki.

Istotnie, biorąc odwrotność obu stron równania (2) otrzymujemy funkcję typu (1), a mianowicie

$$\frac{1}{I} = \frac{r}{E} + \frac{1}{E}R \tag{3}$$

$\frac{1}{I}$ - jest tu zmienną zależną, $\frac{r}{E}$ – wyrazem wolnym, a $\frac{1}{E}$ – współczynnikiem przy zmiennej niezależnej R. Jak wiadomo, wyraz wolny a w funkcji liniowej typu (1) jest równy rzędnej punktu przecięcia prostej z osią y. Podobnie w naszym przypadku

$$\frac{r}{E} = \overline{OK} \tag{4}$$

Wyobraźmy sobie teraz, że natężenie prądu I dąży do nieskończoności, czyli $\frac{1}{I} \to 0$. Zgodnie z naszym rysunkiem przypadek taki będzie się odnosił do punktu przecięcia prostej z osią odciętych R. Zakładając, że $\frac{1}{I} = 0$, otrzymamy

$$0 = \frac{r}{E} + \frac{1}{E}R$$

a stąd zależność

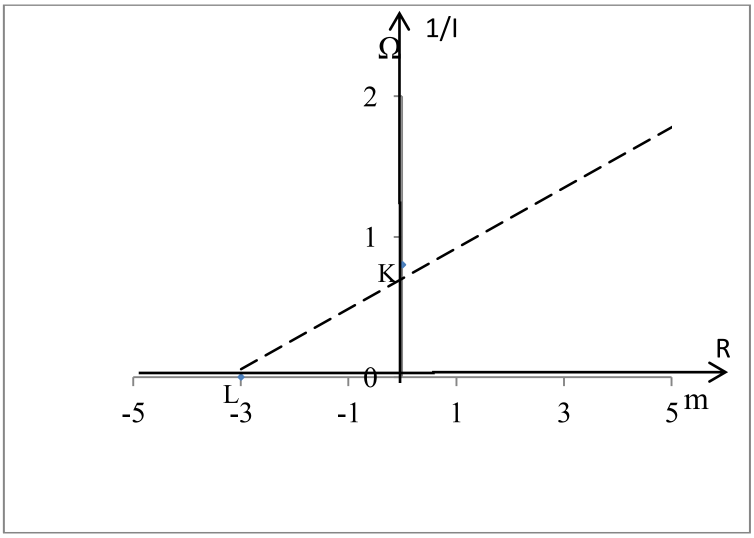
$$r = -R.$$

R jest w tym przypadku ujemne, punkt przecięcia leży bowiem na lewo od początku układu. Tu oczywiście jest to po prostu odcięta $\overline{OL}$, dla której staje się równa zeru. Mamy więc

$$r = \overline{OL} \tag{5}$$

Na podstawie (4) i (5) możemy napisać ostatecznie

$$E = \frac{\overline{OL}}{\overline{\overline{OK}}} \tag{6}$$



Rys.3

Jak widać, wielkości charakteryzujące bateryjkę, jak jej opór wewnętrzny $r_w = r - r_a$ i siłę elektromotoryczną E można znaleźć czysto graficznie, korzystając z wykresu wykonanego w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych. Odcinki $\overline{OL}$ i $\overline{OK}$ zmierzymy na dziesięciokrotnie powiększonym wycinku wykresu (Rys.3).

Zgodnie z (5) mamy

$$r = \overline{OL} = 3{,}35\ \Omega$$

zatem opór wewnętrzny

$$r_w = (3{,}35 - 0{,}21)\ \Omega = 3{,}14\ \Omega$$

Dalej, zgodnie z (6)

$$E = \frac{\overline{OL}}{\overline{\overline{OK}}} = \frac{3{,}35}{0{,}72} \approx\sim 4{,}65\ \text{V}$$

SEM bateryjki E oraz jej opór wewnętrzny r_w można również wyznaczyć bez posługiwania się wykresem. Wyjdźmy mianowicie z prawa Ohma (2), nadając mu postać

$$E = Ir + IR$$

W równaniu tym występują niewiadome E i r oraz wielkości: mierzona I i znana R. Zastosujemy to równanie dwukrotnie, biorąc dwie pary odpowiadających sobie wartości I i R. By uzyskać możliwie dokładne wyniki, najlepiej użyć wartości znacznie różniących się od siebie. Weźmy np. wartości R i I z pierwszej i ostatniej kolumny naszej tabelki. Pierwsze oznaczmy wskaźnikami 1, a drugie wskaźnikami 2. otrzymamy układ równań

$$E = I_1 r + I_1 R_1 \tag{7}$$

$$E = I_2 r + I_2 R_2$$

Mnożąc obie strony pierwszego równania przez I_2 a drugiego przez I_1 i odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego, otrzymamy kolejno

$$E(I_1 - I_2) = I_1 I_2 (R_2 - R_1)$$

$$E = \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2}(R_2 - R_{1)}$$

po podstawieniu zaś wartości liczbowych $E \approx 4{,}68$ V.

Wartość ta różni się tylko nieznacznie od wyniku uzyskanego metodą graficzną.

Podstawiając teraz znalezioną wartość E do któregokolwiek z równań (7) otrzymujemy $r \approx 4\ \Omega$, a stąd $r_w \approx 3{,}8\ \Omega$. Tu jest nieco większa niezgodność z poprzednim wynikiem, w każdym jednak razie rząd wielkości jest ten sam.

Zachodzi pytanie, które wyniki należy uznać z dokładniejsze. Pomiary długości odcinków na rysunku nie są, co prawda, dokładne, ale prawidłowe poprowadzenie prostej przez zespół punktów pomiarowych zmniejsza wpływ błędów przypadkowych na wynik. Metoda rachunkowa jest oparta na dwóch jedynie pomiarach, a przecież wcale nie wiemy, czy właśnie te dwa pomiary nie są obarczone znacznym błędem przypadkowym. W metodzie tej można było dokładność podnieść, powtarzając rachunki dla szeregu par pomiarów i biorąc następnie średnią wyników otrzymanych. My jednak ograniczyliśmy się jedynie do jednej pary pomiarów, przeto naszą metoda graficzna jest bardzo pouczająca, toteż szkoda, ze tylko niewielu zawodników wpadło na pomysł jej użycia.

Reasumując za wartości najbardziej zbliżone do prawdziwych (dla tej bateryjki, którą badał omawiany zawodnik) należy uznać

$$E \approx 4{,}7 \text{ V} \quad \text{i} \quad r_w \approx 3{,}1\ \Omega.$$