VII MIĘDZYNARODOWA OLIMPIADA FIZYCZNA (1974). Zad. teoretyczne – T3.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Olimpiada Fizyczna XXIII – XXIV, WSiP Warszawa 1977

Autor: Waldemar Gorzkowski

Nazwa zadania: Płytka o zmiennym współczynniku załamania

Działy: Optyka

Słowa kluczowe: współczynnik załamania, bieg promienia, promień światła, płytki płaskorównoległe, grubość płytki

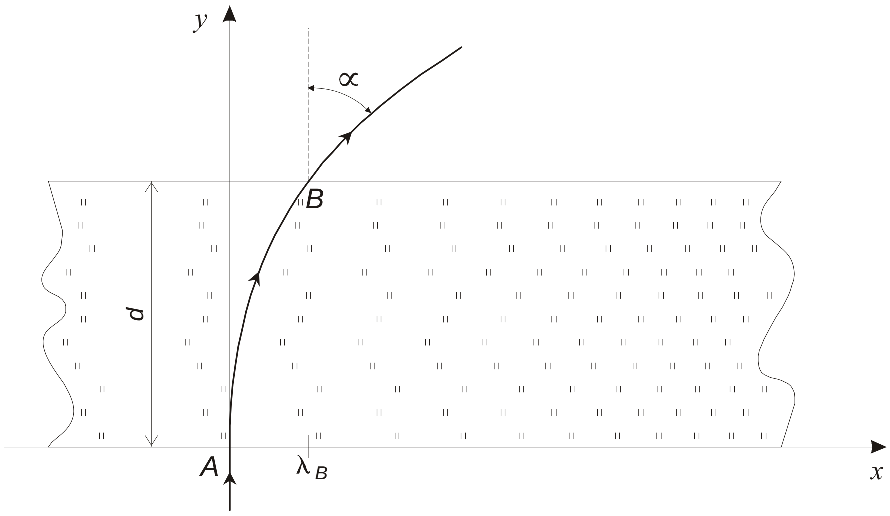
---

Zadanie teoretyczne – T3, VII MOF.

Na płytkę płaskorównoległą, której współczynnik załamania zmienia się zgodnie ze wzorem:

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}$$

w punkcie A (o współrzędnej $x = 0$) prostopadle do płytki pada wąski promień światła. Promień ten wychodzi z płytki w punkcie B pod kątem α do kierunku pierwotnego (rys. 1).



Rys. 1

1) Ile wynosi współczynnik załamania w punkcie B, w którym promień opuszcza płytkę?
2) Ile wynosi współrzędna x_B punktu B?
3) Ile wynosi grubość płytki d?

Dane:

$n_0 = 1{,}2$

$R = 13$ cm

$\alpha = 30°$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy promień światła przechodzący przez szereg płytek płaskorównoległych o różnych współczynnikach załamania (rys. 2). Prawo Snelliusa

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

można napisać w postaci

$$n_2 \sin \beta_2 = n_1 \sin \beta_1$$

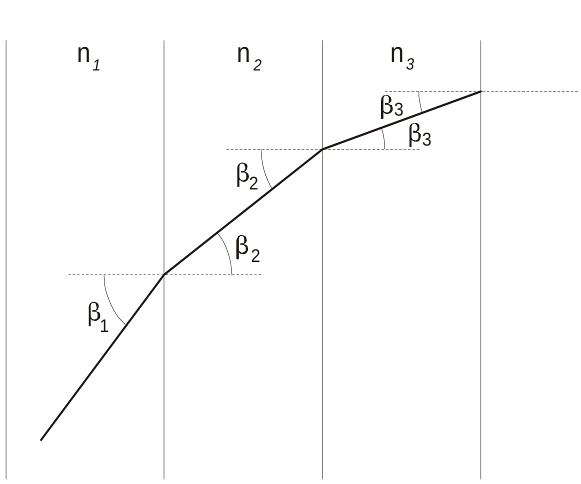
W podobny sposób dostajemy

$$n_3 \sin \beta_3 = n_2 \sin \beta_2 \text{, itd.}$$

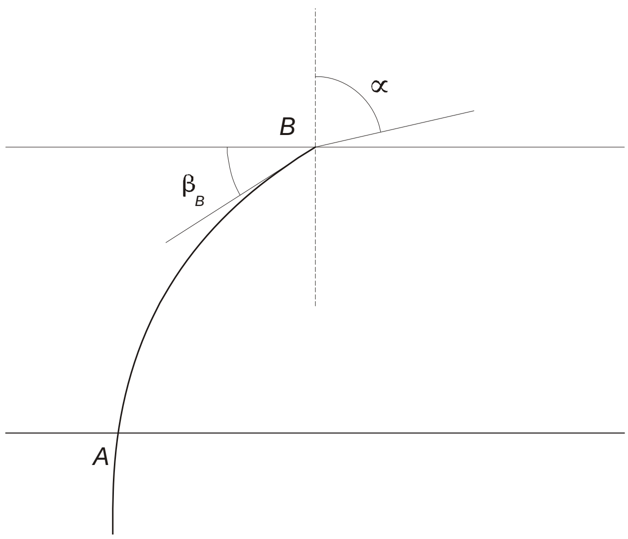
Zatem

$$n_i \sin \beta_i = \text{const.}$$

Związek powyższy, jak wynika z wyprowadzenia, zachodzi niezależnie od ilości i grubości poszczególnych warstw. Możemy więc z niego korzystać również w przypadku ciągłej zmiany współczynnika załamania w jednym kierunku (w naszym przypadku w kierunku x).



Rys. 2



Rys. 3

Rozpatrzmy teraz sytuację pokazaną na rysunku 3. W punkcie A kąt β_A wynosi 90°, a współczynnik załamania równa się n_0. Z podanego wyżej wyprowadzenia wynika, że

$$n_0 \sin \beta_A = n_B \sin \beta_B,$$

czyli

$$n_0 = n_A \sin \beta_B.$$

Z prawa Snelliusa dla załamania w punkcie B mamy ponadto

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \beta_B)} = n_B.$$

Stąd

$$\sin\alpha = n_B\sqrt{1-\sin^2\beta_B} = \sqrt{n_B^2 - (n_B\sin\beta_B)^2}.$$

Zastępując w ostatnim wzorze $n_B\sin\beta_B$ przez n_0 otrzymujemy

$$\sin\alpha = \sqrt{n_B^2 - n_0^2}.$$

Zatem

$$n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2\alpha}\ .$$

Liczbowo:

$$n_B = \sqrt{\left(\frac{12}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^2} = 1{,}3.$$

Współrzędną x_B wyznaczamy ze znanej zależności n od x:

$$n_B = n(x_B) = \frac{n_0}{1-\frac{x_B}{R}}$$

$$x_B = R\left(1-\frac{n_0}{n_B}\right).$$

Liczbowo:

$$x_B = 13\ \text{cm}\left(1-\frac{1{,}2}{1{,}3}\right) = 1\ \text{cm}.$$

Odpowiedź na pytanie zawarte w punkcie 3 wymaga wyznaczenia kształtu toru promienia. Z podanego na wstępie rozumowania znamy kąt $\beta(x)$ w każdym punkcie toru (rys. 4):

$$n(x)\sin\beta(x) = n_0,$$

Czyli

$$\sin\beta(x) = \frac{n_0}{n(x)} = \frac{R-x}{R}.$$

Zbadajmy kierunek promienia, który znalazł się w punkcie C leżącym na obwodzie koła o promieniu R i środku w punkcie O. Z rysunku widzimy, że

$$\sin\sphericalangle COC' = \frac{R-x}{R} = \sin\beta(x),$$

$<COC'$ równa się więc kątowi $\beta(x)$, jaki promień światła musi tworzyć w punkcie C z kierunku odcinka CC'! Oznacza to, że kierunek promienia, który znalazł się w dowolnym punkcie C rozpatrywanego okręgu musi być styczny do tego okręgu. Zatem znalazłszy się raz na obwodzie rozpatrywanego koła promień światła nie może już go opuścić. Jednak w punkcie A promień już znalazł się na rozpatrywanym okręgu, a więc nie może go opuścić aż do wyjścia z płytki w punkcie B. Ponieważ $A'B$ = 1 cm, więc $B'B$ = 12 cm i z trójkąta prostokątnego $BB'O$ znajdujemy

$$d = B'O = \sqrt{13^2 - 12^2}\ \text{cm} = 5\ \text{cm}.$$

Kształt toru $y(x)$ wewnątrz płytki można wyznaczyć i w bardziej rzemieślniczy sposób. Mając sin $\beta(x)$ wyznaczamy tg $\beta(x)$. Otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\beta(x) = \frac{R-x}{\sqrt{R^2-(R-x)^2}}.$$

Ale tg $\beta(x) = y'(x)$

Zatem:

$$y'(x) = \frac{R-x}{\sqrt{R^2-(R-x)^2}} = \left(\sqrt{R^2-(R-x)^2}\right)'.$$

Stąd

$$y = \sqrt{R^2-(R-x)^2} + \text{stała}$$

Wartość stałej określamy z warunku $y(0) = 0$. Otrzymujemy wtedy, że stała ta równa się zeru. Mamy więc

$$y = \sqrt{R^2-(x-R^2)},$$

czyli

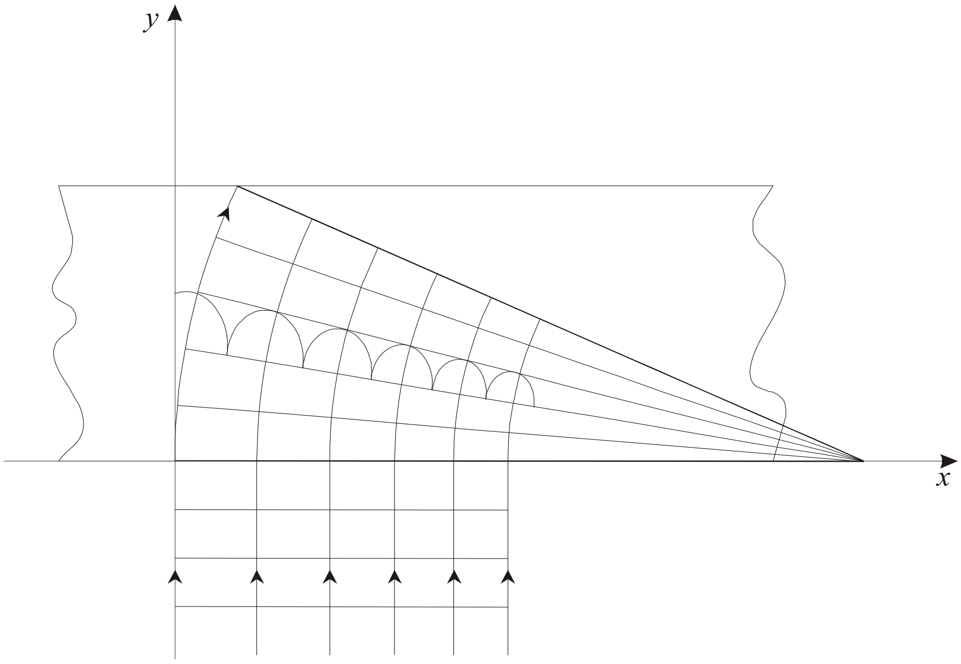
$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$

Oznacza to, że wewnątrz płytki tor promienia jest okręgiem rozpatrywanym już poprzednio.

A oto jeszcze jeden sposób wyznaczania drogi promienia wewnątrz płytki.

Jeśli przez punkt o współrzędnych $(R,0)$ poprowadzimy prostą przechodzącą przez punkt B oraz kilka prostych przecinających drogę promienia wewnątrz płytki, to na każdej z tych prostych współczynnik załamania będzie zmieniał się odwrotnie proporcjonalnie do odległości od punktu $(R, 0)$. Rzecz jasna, że dla każdej z tych prostych współczynnik proporcjonalności będzie inny. Poprowadźmy teraz kilka okręgów o środku w punkcie $(R, 0)$. Łatwo zauważyć, że droga optyczna wzdłuż każdego okręgu od jednej prostej do drugiej prostej będzie taka sama. Dzięki tej właściwości rozważanej płytki bardzo łatwo udowodnić, że wewnątrz płytki promień musi biec po okręgu.

Przede wszystkim zauważmy, że tak naprawdę, to promień światła jest tylko pewną idealizacją. W praktyce mamy co najwyżej wąskie wiązki, a więc w gruncie rzeczy fale płaskie. Załóżmy więc, że na naszą płytkę pada fala płaska – rys. 4. Wewnątrz płytki fala ta ulega ugięciu.



Rys. 4

Załóżmy, że w pewnym momencie czoło fali dotarło do którejś z prostych przechodzących przez punkt (R, 0). Na rysunku prosta tę zaznaczono poprzecznymi kreskami. Fale wtórne wysyłane przez czoło fali w tym momencie w ciągu jednakowych odstępów czasu przebywają jednakowe drogi optyczne. Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy poprzednio, oznacza to, że obwiednia czół fal wtórnych po niewielkim czasie Δt znów będzie jedna z prostych przechodzących przez punkt (R, 0). Ponieważ czoło fali w chwili, gdy wiązka pada na płytkę, pokrywa się z osią x przechodzącą przez punkt (R, 0), więc wewnątrz płytki czoło fali będzie cały czas pokrywać się z którąś z rozważanych prostych, a to właśnie oznacza, że wewnątrz płytki promień będzie biegł po łuku okręgu o środku w punkcie (R, 0).

Proponowana punktacja (usuń jeśli brak punktacji)

1.	za dowód, że $n\sin\beta = \mathrm{const}$	2 pkt.
2.	za prawidłowy opis warunków na brzegach płytki	2 pkt.
3.	za obliczenie x_B	1 pkt.
4.	za obliczenie d	5 pkt.

Wskazówki dla organizatorów

Jak zwykle uznawano tylko obliczenia wykonywane na podstawie udowodnionych założeń. W szczególności za wyznaczenie grubości d stawiano zero punktów, a nie pięć, jeśli zawodnik przyjął, że promień biegnie po okręgu, lecz nie udowodnił tego.