

### Rozwiązanie zadania 3. 63OF\_II\_T3

Gdy grzałka jest wyłączona, zmiana temperatury czajnika od chwili  $t$  do chwili  $t + \Delta t$  jest dla małych  $\Delta t$  równa

$$\Delta T = (T_P - T_O) e^{-\alpha t - \alpha \Delta t} - (T_P - T_O) e^{-\alpha t} = (e^{-\alpha \Delta t} - 1) (T_P - T_O) e^{-\alpha t} = -\alpha \Delta t (T_P - T_O) e^{-\alpha t}. \quad (14)$$

Oznacza to, że szybkość, z jaką czajnik o temperaturze  $T$  oddaje ciepło otoczeniu (lub pobiera, jeśli  $T < T_O$ ), wynosi

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha (T_P - T_O) e^{-\alpha t} = -C\alpha (T - T_O), \quad (15)$$

gdzie  $C$  jest pojemnością cieplną czajnika z wodą.

Gdy jest włączona grzałka o mocy  $P$ , szybkość dopływu energii do czajnika o temperaturze  $T$  wynosi w sumie  $-C\alpha (T - T_O) + P$ , zatem równanie na szybkość zmian temperatury czajnika przyjmie postać

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha (T - T_O) + P. \quad (16)$$

Z matematycznego punktu widzenia jest to takie samo równanie, jak równanie  $C \frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha (T - T_O)$ , pod warunkiem zamiany stałej  $T_O$  na  $T_O + \frac{P}{\alpha C}$ . Zatem gdy grzałka jest włączona, zależność temperatury czajnika z wodą od czasu jest opisana wzorem

$$T(t) = \left( T_P - T_O - \frac{P}{\alpha C} \right) e^{-\alpha t} + T_O + \frac{P}{\alpha C}. \quad (17)$$

W przypadku  $T_P = T_O$  ten wzór sprowadza się do

$$T(t) = -\frac{P}{\alpha C} e^{-\alpha t} + T_O + \frac{P}{\alpha C}. \quad (18)$$

Jeśli grzałka oddała energię  $E_1$ , to czas jej pracy wynosił  $t_1 = E_1/P_1$ , co daje następujący związek między  $E_1$  i  $T_K$ :

$$T_K = -\frac{P_1}{\alpha C} e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}} + T_O + \frac{P_1}{\alpha C}. \quad (19)$$

Stąd możemy wyznaczyć  $C$

$$C = \frac{1 - e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}}}{T_K - T_O} \frac{P_1}{\alpha}. \quad (20)$$

Zauważmy, że dla małych  $\alpha \frac{E_1}{P_1}$  otrzymalibyśmy po prostu  $C = E_1/(T_K - T_O)$ .

Jeśli moc grzałki wynosi  $P_2$ , należy we wzorze (19) zamienić  $P_1$  na  $P_2$  a  $E_1$  na  $E_2$

$$T_K = -\frac{P_2}{\alpha C} e^{-\alpha \frac{E_2}{P_2}} + \frac{P_2}{\alpha C} + T_O. \quad (21)$$

Stąd możemy wyznaczyć  $E_2$

$$E_2 = -\frac{P_2}{\alpha} \ln \left[ 1 + (T_O - T_K) \frac{\alpha C}{P_2} \right] \quad (22)$$

$$= -\frac{P_2}{\alpha} \ln \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}} \right) \frac{P_1}{P_2} \right]. \quad (23)$$

Zauważmy, że dla  $P_1 = P_2$  otrzymamy  $E_1 = E_2$ . Taki wynik otrzymamy również gdy  $\alpha \frac{E_1}{P_1} \ll 1$  oraz  $\alpha \frac{E_1}{P_2} \ll 1$  – odpowiada to pominięciu strat energii. Zauważmy również, że nie można wyznaczyć  $E_2$ , gdy  $1 - \left( 1 - e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}} \right) \frac{P_1}{P_2} \leq 0$ , co odpowiada  $T_K - T_O > P_2/(\alpha C)$  – grzałka o mocy  $P_2$  nie jest w stanie doprowadzić czajnika do temperatury  $T_K$ .

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy:

$$E_2 \approx 3,2 \cdot 10^5 \text{ J, dla } P_2 = 300 \text{ W,} \quad (24)$$

$$E_2 \approx 8,2 \cdot 10^5 \text{ J, dla } P_2 = 200 \text{ W.} \quad (25)$$

### Punktacja zadania 3.

Równanie na szybkość zmian temperatury (bilansu cieplnego) (wzór (16)) wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

Zależność temperatury od czasu przy włączonej grzałce (wzór (18)) – 2 pkt.

Pojemność cieplna (wzór (20) lub równoważny) – 1 pkt.

Energia zużyta w przypadku grzałki o mocy  $P_2$  (wzór (23) lub równoważny) – 2 pkt.

Dyskusja otrzymanego wyniku (zauważenie, że dla  $T_K - T_O > P_2/(\alpha C)$  otrzymanie temperatury końcowej nie jest możliwe) – 1 pkt.

Wyniki liczbowe (wzory (24) oraz (25)) – 1 pkt.