Rozwiązanie zadania 2.

Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wynosi $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, gdzie Φ jest strumieniem pola B. Jeśli opór drutu jest bardzo mały, to ta siła elektromotoryczna spowoduje przepływ bardzo dużego prądu. Taki prąd będzie wytwarzał pole magnetyczne przeciwstawiające się zmianie Φ. W granicy oporu dążącego do zera wytworzone pole magnetyczne może być dowolnie duże, czyli w tej granicy strumień pola B przechodzący przez powierzchnię ograniczoną drutem nie może się zmieniać. Zatem przy opisywanych w zadaniu deformacjach solenoidu natężenie prądu zmieni się tak, by strumień pozostał stały.

Z prawa Ampère'a wynika, że wewnątrz solenoidu (ponieważ jest to standardowy wzór szkolny, nie przedstawiamy jego wyprowadzenia)

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}, \tag{7}$$

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.

To pole jest równoległe do solenoidu, a jego wartość jest taka sama w każdym punkcie przekroju i nie zależy od kształtu tego przekroju. Mamy zatem

$$\Phi = BS, \tag{8}$$

gdzie S jest polem przekroju poprzecznego solenoidu.

1a) Ponieważ S zmalało dwukrotnie, a $\Phi = \text{const}$, zatem indukcja B musiała dwukrotnie wzrosnąć. Z wzoru $B = \mu_0 IN/l$ wynika, że natężenie prądu wzrosło dwukrotnie.

1 b) Początkowa energia pola magnetycznego wynosiła $E_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \cdot \pi r^2 l$ (gęstość energii pola pomnożona przez objętość zawartą wewnątrz solenoidu; można również oprzeć się na wzorze $E_m = LI^2/2$). Dwukrotny wzrost B oznacza czterokrotny wzrost gęstości energii, a po pomnożeniu przez dwukrotnie mniejszą objętość otrzymujemy podwojenie energii pola. Wykonana praca jest więc równa początkowej energii:

$$W = E_m = \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2 \tag{9}$$

2a) Warunek $\frac{2l}{N} \ll r$ oznacza, że wydłużenie solenoidu nie pociągnie za sobą zmniejszenia r, więc skoro $\Phi = \text{const}$, to i $B = \text{const}$. Na podstawie wzoru $B = \mu_0 IN/l$ wnioskujemy, że w tym przypadku również nastąpi dwukrotny wzrost natężenia prądu.

2b) Wykonana praca jest równa różnicy końcowej i początkowej energii pola magnetycznego

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2 \cdot 2l} N^2 r^2 (2I)^2 - \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2 = \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2. \tag{10}$$

Jest to taki sam wynik jak w pkt. 1 b).
3. Zgodnie z pkt. 2 energia pola magnetycznego sprężyny o długości l_x wynosi

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 l_x, \tag{11}$$

przy czym $B = \mu_0 I N / l$ jest stałe. Całkowita energia

$$E_c = E_m + \frac{1}{2} k (l_x - l_0)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 l_x + \frac{1}{2} k (l_x - l_0)^2 \tag{12}$$

jest minimalna w stanie równowagi, czyli dla $l_x = l$. Korzystając ze wzoru na minimum funkcji kwadratowej otrzymamy

$$l = l_0 - \frac{1}{k} \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2.$$

Stąd

$$l_0 = l + \frac{1}{k} \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 = l + \frac{1}{k} \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} \pi r^2 I^2. \tag{13}$$

Przepływ prądu powoduje więc takie skrócenie sprężyny, jakby działała na nią siła ściskająca $F = \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} \pi r^2 I^2$.

Punktacja zadania 2.

Warunek $\Phi = \text{const}$ wraz z uzasadnieniem – 2 pkt.
Wzory (7) oraz (8) – 1 pkt.
Dwukrotny wzrost natężenia prądu w przypadku 1. – 1 pkt.
Wykonana praca w przypadku 1. (wzór (9)) – 1 pkt.
Dwukrotny wzrost natężenia prądu w przypadku 2. – 1 pkt.
Wykonana praca w przypadku 2. (wzór (10)) – 1 pkt.
Energia całkowita w przypadku 3. (wzór (12)) – 1 pkt.
Długość swobodna sprężyny (wzór (13)) – 2 pkt.