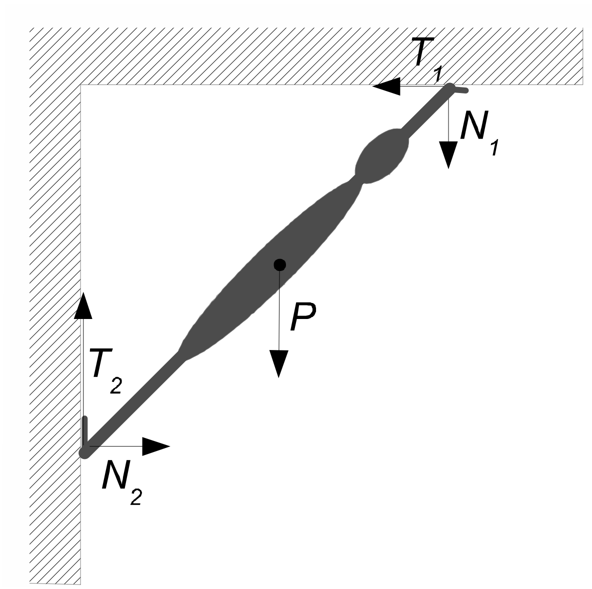
Rozwiązanie zadania 1. 63OF_II_T1

Niech siła tarcia rąk o sufit wynosi T_1, siła tarcia stóp o ścianę – T_2.

Warunki równowagi są następujące (patrz. Rys. 2. – zaznaczono na nim siły działające na akrobatę):



Rys. 2.: Siły działające na akrobatę.

$$
\begin{array}{ll}
\text{w pionie:} & P = T_2 - N_1, \\
\text{w poziomie:} & T_1 = N_2, \\
\text{równowaga momentów sił:} & (T_2 + N_1)\frac{l}{2\sqrt{2}} = (T_1 + N_2)\frac{l}{2\sqrt{2}},
\end{array}
\tag{1}
$$

gdzie l jest długością akrobaty od dłoni do stóp.

Ponieważ siły nacisku nie mogą być ujemne, a $P > 0$, z pierwszych dwóch z powyższych równań wynika, że również $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$.

Dodatkowo muszą być spełnione warunki wynikające z definicji współczynnika tarcia

$$T_1 \leq \mu N_1, \tag{2}$$

$$T_2 \leq \mu N_2. \tag{3}$$

Oczekujemy, że minimalne N_2 odpowiada skrajnemu przypadkowi, tzn. $T_1 = \mu N_1$ lub $T_2 = \mu N_2$. Odpowiada to oczekiwaniu, że zwiększenie μ powoduje zmniejszenie minimalnego N_2. Przyjmiemy takie założenie i sprawdzimy, że jest ono spełnione na podstawie końcowych wyników.

Zakładając, że w skrajnym przypadku $T_2 = \mu N_2$, otrzymamy

$$N_2 = \frac{P}{2(\mu-1)} = T_1,\ N_1 = \frac{2-\mu}{2(\mu-1)}P,\ T_2 = \frac{\mu P}{2(\mu-1)}. \tag{4}$$

Warunek $0 \leq T_1 \leq \mu N_1$ w połączeniu z powyższym daje $0 \leq \frac{P}{2(\mu-1)} \leq \mu\frac{2-\mu}{2(\mu-1)}P$, czyli $\mu - 1 > 0$ oraz $1 \leq (2-\mu)\mu$. Ten warunek nie może być spełniony – maksymalna wartość $(2-\mu)\mu$ to 1 i jest osiągana dla $\mu = 1$. Zatem założenie, że w skrajnym przypadku $T_2 = \mu N_2$ nie może być spełnione.

Zakładając, że w skrajnym przypadku $T_1 = \mu N_1$ otrzymamy

$$N_1 = \frac{P}{2(\mu-1)},\ T_1 = \frac{\mu P}{2(\mu-1)} = N_2,\ T_2 = \frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}P. \tag{5}$$

Warunek $0 \leq T_2 \leq \mu N_2$ w połączeniu z powyższym daje $0 \leq \frac{2\mu-1}{2(\mu-1)} P \leq \mu^2 \frac{P}{2(\mu-1)}$ czyli $\mu - 1 > 0$ oraz $2\mu-1 \leq \mu^2$. Warunek $2\mu-1 \leq \mu^2$ jest spełniony zawsze, zatem nasze zagadnienie ma rozwiązanie jeśli $\mu > 1$ – działające siły są wtedy dane wzorami (5). Zauważmy, że $N_2 = \frac{\mu P}{2(\mu-1)} = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{1}{\mu-1}\right)$ jest (dla $\mu > 1$) malejącą funkcją μ, czyli jest spełnione założenie, że minimalne N_2 odpowiada skrajnemu przypadkowi z (2), (3).

Zatem ostatecznie

$$N_1 = \frac{P}{2(\mu-1)}, \; N_2 = \frac{\mu P}{2(\mu-1)}, \tag{6}$$

przy czym, aby sytuacja opisana w zadaniu była możliwa, μ musi być większe od 1.

Punktacja zadania 1.

Warunki równowagi sił i momentów sił (wzory (1) lub równoważne) – 3 pkt.

Przyjęcie, że minimalne N_2 odpowiada jednemu ze skrajnych przypadków $T_1 = \mu N_1$ lub $T_2 = \mu N_2$ (punkt nie przysługuje za zapis, z którego wynika żądanie spełnienia obu warunków jednocześnie) – 1 pkt.

Siły nacisku przy założeniu $T_2 = \mu N_2$ (wzory (4)) lub argumentacja pozwalająca na odrzucenie tego przypadku) – 2 pkt.

Siły nacisku przy założeniu $T_1 = \mu N_1$ (wzory (5)) – 2 pkt.

Wybór właściwego rozwiązania z uzasadnieniem (wzory (6)) – 2 pkt.