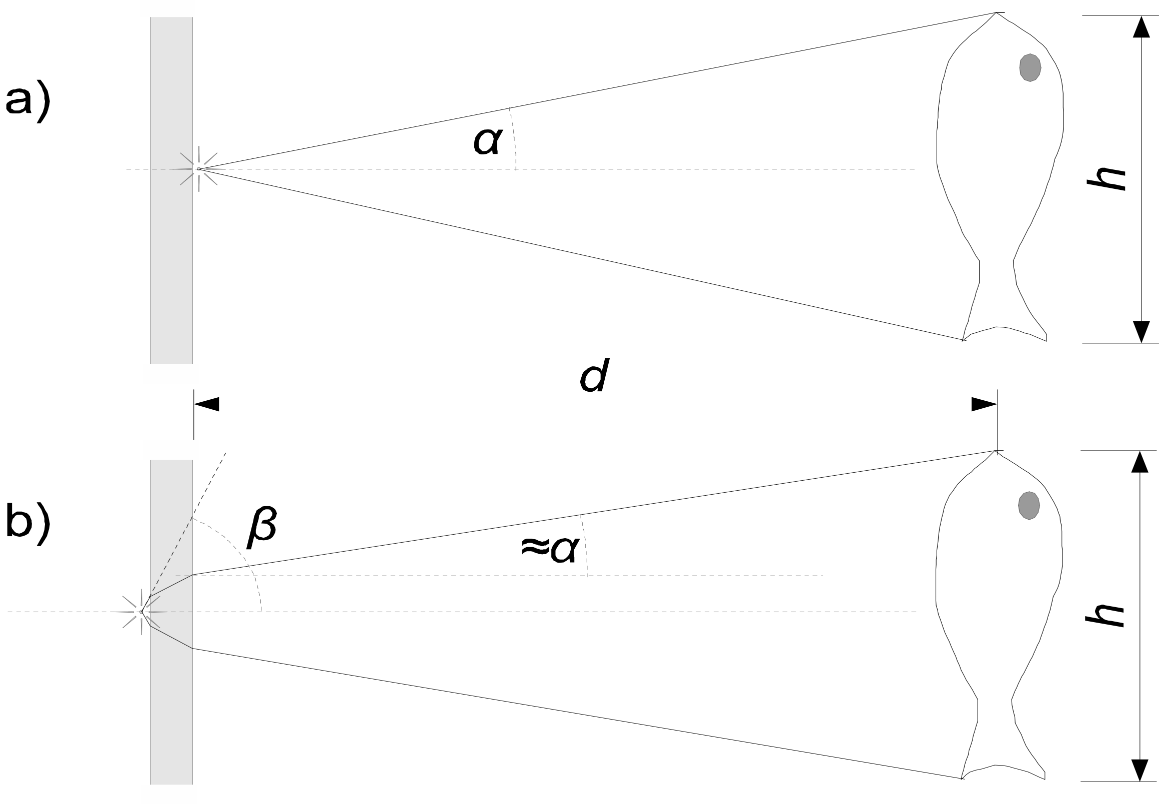
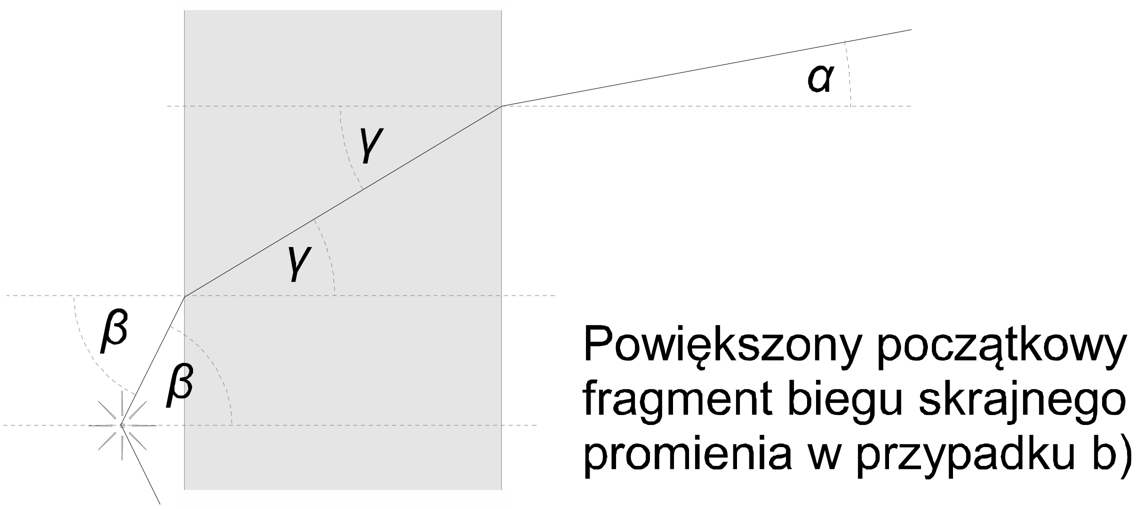
Rozwiązanie zadania 1



Rozważmy sytuację w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do ścianki – jak np. na powyższym rysunku. Niech α będzie kątem, jaki skrajny promień padający na rybkę tworzy z normalną do płaszczyzny ścianki akwarium. Ponieważ grubość szkła ścianki jest bardzo mała, w obu rozważanych przypadkach ten kąt jest w przybliżeniu taki sam. W sytuacji przedstawionej na rysunku jest on dany wzorem $\alpha \approx \frac{h/2}{d}$, gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $h \ll d$ (rybka jest mała). W przypadku a) kąt α jest kątem, jaki tworzy rozważany promień z normalna do ścianki akwarium tuż po wyjściu ze źródła. W przypadku b) kąt β, jaki tworzy rozważany skrajny promień z normalną do ścianki akwarium tuż po wyjściu ze źródła, jest większy z powodu załamania – patrz rysunek poniżej.



Stosując prawo Snelliusa kolejno do załamania na granicy powietrze-szkło i załamania na granicy szkło-woda otrzymujemy (patrz rysunek powyżej)

$$\sin \beta = n_s \sin \gamma,$$
$$n_s \sin \gamma = n_w \sin \alpha.$$

Zatem dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \approx \frac{\beta}{\alpha} = n_w, \tag{1}$$

gdzie wykorzystaliśmy to, że kąty są małe (rybka jest mała). Zauważmy, że powyższy wzór obowiązuje również dla dowolnych innych skrajnych promieni padających na rybkę, np. jeśli rozważymy sytuację w płaszczyźnie prostopadłej do ścianki oraz płaszczyzny rozważanej dotychczas.

Ponieważ źródło jest izotropowe, natężenie oświetlenia rybki jest proporcjonalne do kąta bryłowego określonego przez te promienie wychodzące ze źródła, które następnie padają na rybkę. Ten kąt bryłowy w przypadku a) jest proporcjonalny do α^2, natomiast w przypadku b) jest proporcjonalny do β^2. Uwzględniając, że przy przejściu z powietrza do wody część promieniowania jest pochłaniana, otrzymujemy

$$I_b/I_a = \eta \cdot (n_w)^2 \tag{2}$$
$$\approx 1,24 > 1. \tag{3}$$

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku $I_b/I_a > 1$, rybka jest lepiej oświetlona w przypadku b).

Punktacja zadania 1

Stosunek β do α (wzór (1)) – 3 pkt.

Zauważenie, że natężenie oświetlenia jest proporcjonalne: w przypadku a) do α^2, a w przypadku b) do β^2 – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (2)) – 3 pkt.

Stwierdzenie, że korzystniejszy jest przypadek b) udokumentowane wynikiem liczbowym (wzór (3)) – 2pkt.

Rozwiązanie zadania 2

Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w pętli wynosi

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{4}$$

gdzie Φ jest przechodzącym przez pętlę strumieniem indukcji pola magnetycznego. Zatem prąd, jaki by płynął w pętli, przy pominięciu napięcia na kondensatorze wyniósłby

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{5}$$

Stąd ładunek, jakim zostałby naładowany kondensator przy pominięciu napięcia na kondensatorze wyniósłby

$$Q = -\frac{\Phi_k - \Phi_p}{R}, \tag{6}$$

gdzie Φ_p jest początkowym strumieniem indukcji magnetycznej przechodzącym przez pętlę, a Φ_k – końcowym.

Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu można wyznaczyć np. z prawa Ampere'a, otrzymując

$$B = \mu_0 \frac{NI_0}{l},$$

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni. Ponieważ w dużej odległości od solenoidu nie ma pola magnetycznego, a pole przekroju poprzecznego solenoidu wynosi πr_1^2, mamy

$$\Phi_p = 0, \ \ \Phi_k = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{l}. \tag{7}$$

Zatem

$$Q = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{Rl}. \tag{8}$$

Przy takim ładunku napięcie na kondensatorze wyniosłoby

$$U = \frac{Q}{C} = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{RCl}. \tag{9}$$

Gdyby na kondensatorze przez cały czas przemieszczania pętli było napięcie U, to odpłynąłby z niego ładunek o wartości

$$Q_2 = -\frac{U}{R}T = -\frac{T}{RC}Q. \tag{10}$$

Ponieważ $\frac{T}{RC} \ll 1$, zatem $|Q_2| \ll |Q|$ i w dobrym przybliżeniu szukany ładunek wynosi $\left|\frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{Rl}\right|$.

Punktacja zadania 2

Prawo Faradaya (wzór (4) lub równoważny) – 1 pkt.

Strumienie indukcji magnetycznej przechodzące przez pętle (początkowy i końcowy, wzory (7)) – 2 pkt.

Ładunek na kondensatorze przy pominięciu napięcia na nim (wzór (8) lub równoważny) – 3 pkt.

Oszacowanie ładunku, jaki odpłynie z kondensatora w trakcie przemieszczania pętli (wzór (10) lub równoważny) – 4 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Niech F będzie siłą, z jaką ściana działa na zderzak , a_2 – przyspieszeniem wózka, ε – przyspieszeniem kątowym koła zamachowego. Z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego otrzymamy

$$F = -Ma_2, \tag{11}$$

natomiast z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego mamy

$$Fr = I\varepsilon. \tag{12}$$

Dodatkowo mamy

$$F = kx_1, \tag{13}$$

$$a_2 - a_1 = \varepsilon r, \tag{14}$$

gdzie x_1 jest ściśnięciem sprężyny (różnicą między długością swobodną a długością aktualną), natomiast a_1 – odpowiadającym mu przyspieszeniem.

Stąd eliminując F, ε oraz a_2 otrzymamy

$$a_1 = -\frac{k}{M}\frac{I + Mr^2}{I}x_1. \tag{15}$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}\frac{I+Mr^2}{I}}$. Rozwiązaniem tego równania jest

$$x_1 = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \tag{16}$$

Uwzględniając, że w chwili uderzenia o ścianę $x_1 = 0$, a prędkość ściskania sprężyny wynosi V_0 otrzymamy

$$x_1 = \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{17}$$

Stąd szukane przyspieszenie

$$a_2 = -\frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \tag{18}$$

$$= -\frac{k}{M}\frac{V_0}{\sqrt{\frac{k}{M}\frac{I+Mr^2}{I}}}\sin\sqrt{\frac{k}{M}\frac{I+Mr^2}{I}}t. \tag{19}$$

Na podstawie powyższego wyrażenia prędkość wózka jest dana wzorem

$$V(t) = \frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega^2}\cos\omega t + v_1, \tag{20}$$

gdzie stałą v_1 tak dobieramy, by $V(t=0) = V_o$. Zatem

$$V(t) = \frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega^2}\cos\omega t - \frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega^2} + V_0 \tag{21}$$

$$= V_0\left(\frac{I}{I+Mr^2}\cos\sqrt{\frac{k}{M}\frac{I+Mr^2}{I}}t + \frac{Mr^2}{I+Mr^2}\right). \tag{22}$$

Aby wózek mógł się zatrzymać musi być spełniony warunek

$$I \geq Mr^2. \tag{23}$$

Można również wyznaczyć ruch wózka. Otrzymamy

$$x_2 = V_0 \left(\frac{I}{I + Mr^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} + \frac{Mr^2}{I + Mr^2} t \right), \tag{24}$$

gdzie x_2 jest odległością, o jaką przesunął się wózek od chwili uderzenia sprężyny o ścianę.

Punktacja zadania 3

II zasada dynamiki dla ruchu wózka (wzór (11)) – 1 pkt.

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego koła zamachowego (wzór (12)) – 1 pkt.

Siła działająca na wózek wyrażona przez ściśnięcie sprężyny (wzór (13)) – 1 pkt.

Związek między przyspieszeniem kątowym koła zamachowego a przyspieszeniem wózka i przyspieszeniem ściskania sprężyny (wzór (14)) – 1 pkt.

Równanie na ściśnięcie sprężyny (wzór (15)) – 2 pkt.

Zależność ściśnięcia sprężyny od czasu (wzór (17)) – 1 pkt.

Przyspieszenie wózka w zależności od czasu (wzór (19)) – 1 pkt.

Warunek na zatrzymanie się wózka (wzór (23) uzasadniony wzorem (22) lub równoważnym) – 2 pkt.