Rozwiązanie zadania 1.

Jeśli układ jest w równowadze, to moment siły $\vec{F}$ względem podstawy płyty jest równy analogicznemu momentowi siły N napięcia liny:

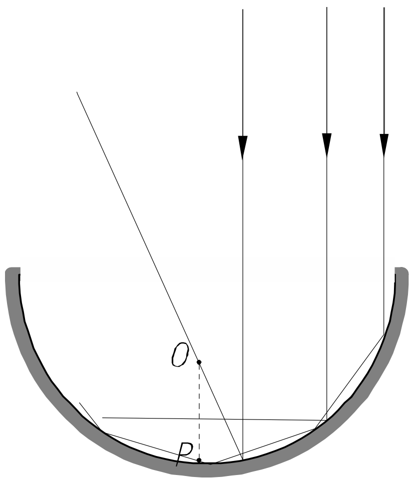
$$HF = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} hN,$$

gdzie H jest wysokością płyty. Z powyższego wynika, że

$$N = \frac{HFL}{h\sqrt{L^2 - h^2}}.$$

Jeśli $h \to 0$ lub $h \to L$ przy ustalonym F, to $N \to \infty$, co oznacza, że dowolnie mała siła F spowoduje zerwanie liny. Jednak nie możemy po prostu przyjąć $h = 0$ lub $h = L$, bo wtedy płyta się przewraca, ale lina się nie rozciąga, a co za tym idzie nie może ulec zerwaniu. Zatem h powinno być zbliżone do 0 lub L – jak bardzo zbliżone zależy od rozciągliwości liny (która nigdy nie jest zerowa).

Rozwiązanie zadania 2.



Rys. 1: Schematyczny rysunek przedstawiający bieg wybranych promieni światła.

Zbadajmy najpierw sytuację, gdy na drodze promieni nie ma kulki. Rozważmy promień równoległy do osi optycznej lustra, odległy od niej o r. Niech O oznacza punkt przecięcia odbitego promienia z osią optyczną lustra, a P – punkt przecięcia osi optycznej z lustrem. Dla bardzo małych r długość d odcinka

OP jest równa $R/2$ – promień odbity przechodzi przez ognisko odpowiadające promieniom przyosiowym. Ze wzrostem r odległość d maleje. Dla $r = \sqrt{2}R/2$ kąt padania promienia na powierzchnię lustra wynosi 45° i po odbiciu światło porusza się prostopadle do osi optycznej, co daje $d = R\left(1 - \sqrt{2}/2\right)$. Gdy kąt padania promienia na powierzchnię lustra wynosi 60° ($r = \sqrt{3}R/2$) otrzymamy $d = 0$. Dla $r > \sqrt{3}R/2$ przed dotarciem do osi optycznej promień odbije się co najmniej jeszcze raz od lustra, przy czym jego największa odległość od powierzchni lustra wynosi $R - r$, czyli jest mniejsza niż $R\left(1 - \sqrt{3}/2\right)$. Zatem dla dowolnego r ($0 < r < R$) otrzymamy $d < R/2$. Ponieważ średnica kulki wynosi $R/2$, oznacza to, że gdy kulkę umieścimy tak, by stykała się z punktem P, wszystkie promienie równoległe do osi optycznej po odbiciu padną na kulkę (fakt, że po umieszczeniu kulki promienie o $r < R/4$ nie dotrą do powierzchni lustra nic tu nie zmienia, bo te promienie też padają na kulkę). Jeśli jednak kulka będzie się znajdowała choć trochę ponad czaszą lustra, to część promieni (o r bliskim R) nie padnie na kulkę.

Zatem kulkę należy umieścić tak, by jej środek był na osi optycznej lustra i by stykała się z jego powierzchnią.

Rozwiązanie zadania 3.

Gdy spinacz ślizga się po kartce, działa na niego siła tarcia nadająca mu przyspieszenie μg. Przyspieszenie to nie zależy od prędkości kartki. W ciągu czasu t prędkość spinacza osiągnie wartość μgt. Ponieważ kartka ma skończone rozmiary, należy ją ciągnąć jak najwolniej, aby spinacz był jak najdłużej przyspieszany, ale tak, by prędkości spinacza i kartki nie zrównały się, gdyż wtedy przestanie działać siła tarcia. Jeśli całkowity czas ciągnięcia wynosi T i $\mu gT \leq v_d$ to $L = v_dT - \mu gT^2/2$. W przypadku granicznym $v_d = \mu gT$, zatem $L = v_d^2/\left(2\mu g\right)$. Czyli kartkę powinniśmy ciągnąć z prędkością $\sqrt{2\mu gL}$.

Rozwiązanie zadania 4.

Podzielmy węża na w przybliżeniu punktowe fragmenty i rozważmy dwa takie fragmenty, o masie m każdy, położone symetryczne względem środka masy węża. Jeśli początkowo odległość miedzy tymi fragmentami wynosiła $2d$, to początkowe odległości tych fragmentów od środka planety wynosiły $r_1 = R-d$. $r_2 = R + d$, gdzie R jest odległością środka masy węża od planety. Zatem sumaryczna siła grawitacyjna działająca na te fragmenty wynosi

$$F_{\text{przed zwinięciem}} = \frac{GMm}{r_1^2} + \frac{GMm}{r_2^2},$$

gdzie M jest masą planety, a G – uniwersalną stałą grawitacyjną.

Tuż po zwinięciu się węża położenie i prędkość jego środka masy nie ulegnie zmianie, a ponieważ rozważane fragmenty znajdą się w pobliżu środka masy węża, sumaryczna siła grawitacyjna działająca na nie wyniesie

$$F_{\text{po zwinięciu}} = \frac{2GMm}{R^2}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{\left(R-d\right)^2} + \frac{1}{\left(R+d\right)^2} = \frac{\left(R+d\right)^2 + \left(R-d\right)^2}{\left(R-d\right)^2\left(R+d\right)^2} = 2\frac{R^2+d^2}{\left(R^2-d^2\right)^2} > \frac{2}{R^2},$$

zatem $F_{\text{przed zwinięciem}} > F_{\text{po zwinięciu}}$. To rozumowanie można powtórzyć dla pozostałych fragmentów węża, z czego wynika, że po zwinięciu siła przyciągająca węża do planety zmalała. Ponieważ nie zmieniła się prędkość środka masy węża i odległość jego środka masy od planety, wąż zacznie się od niej oddalać.

(Oczywiście gdyby wąż miał bardzo ciężką głowę, powyższe rozumowanie należałoby odpowiednio zmodyfikować. Jednak zoologia nie zna takich przypadków.)

Rozwiązanie zadania 5:

Niech I_{1+} będzie natężeniem wiązki biegnącej od pierwszej do drugiej płytki, I_{1-} – natężeniem wiązki biegnącej od drugiej do pierwszej płytki, a I_{2+} – natężeniem wiązki za drugą płytką. Zgodnie z podanym wzorem (zamieniając w nim I_0 przez aktualne natężenie wiązki) i uwzględniając, że pierwsza z wymienionych wiązek jest sumą wiązki przechodzącej i odbitej, mamy

$$I_{1+} = pI_0 + (1-p)\, I_{1-},\ I_{1-} = (1-p)\, I_{1+},\ I_{2+} = pI_{1+}.$$

Stąd

$$I_{2+} = \frac{p}{2-p} I_0.$$

Ten wynik można też otrzymać rozpatrując wielokrotne odbicia i sumując powstały szereg.

Rozwiązanie zadania 6.

Zauważmy, że nadanie przy skoku prędkości początkowej skierowanej pionowo w dół zmniejszy odległość, na jaką zbliżymy się do ziemi. Tak samo będzie, jeśli początkowo podskoczymy w górę, bo po chwili będziemy przelatywać obok punktu początkowego z prędkością skierowaną w dół.

Rozważmy teraz sytuację, gdy nasza prędkość początkowa jest pozioma – co powoduje, rozciągnięta guma nie będzie pionowa.

Jeśli guma jest rozciągnięta i jej koniec znajduje się o z niżaj, niż punkt zawieszenia, to wydłużenie gumy wynosi $\Delta l = (z/\cos\alpha - l_0)$, gdzie α jest kątem jaki tworzy guma z pionem, a l_0 długością swobodną gumy. Pionowa składowa siły napięcia gumy wynosi zatem $\Delta l k \cos\alpha = (z - l_0 \cos\alpha)\, k \geq (z - l_0)\, k$. Oznacza to, że gdy gumka jest odchylona od pionu, siła przeciwstawiająca się grawitacji jest większa niż przy tym samym z dla gumy pionowej. Zatem jeśli przy skoku odbijemy się w kierunku poziomym, to mniej zbliżymy się do ziemi.

Rozwiązanie zadania 7.

Przyjmijmy, że w układzie odniesienia, w którym spoczywamy, odstęp czasu między śmiercią Elvisa Presleya a chwilą obecną wynosi T. Niech O' odpowiada szukanemu obserwatorowi, znajdującemu się w chwili obecnej w odległości d (w naszym układzie odniesienia) od nas i zbliżającym się do nas z prędkością v. Dla spoczywającego względem nas obserwatora O, którego w chwili obecnej mija obserwator O', współrzędne czasoprzestrzenne śmierci Elvisa wynoszą (dla uproszczenia rozważamy tylko współrzędną czasową t i jedną współrzędną przestrzenną x) $t = -T$, $x = d$, a chwila obecna to $t = 0$. Zgodnie z transformacją Lorentza, współrzędna czasowa śmierci Elvisa w układzie O' (przyjmujemy, że początki układów O i O' się pokrywają) wynosi

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-T - \frac{v}{c^2}d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdzie c jest prędkością światła. Zatem aby $t' > 0$, tzn. by śmierć Elvisa była zdarzeniem przyszłym w układzie O', musi być spełniony warunek

$$v < -\frac{T}{d}c^2,$$

przy czym dla realnych układów odniesienia

$$-c < v < c.$$

Oznacza to, że d oraz v powinny spełniać warunki

$$d > Tc,\ c > -v > \frac{T}{d}c^2.$$

Przyjmując w przybliżeniu $T = 34$ lata (Elvis Presley zmarł 16 sierpnia 1977 roku), np. obserwator znajdujący się od nas w odległości 100 lat świetlnych i oddalający się od nas z prędkością $c/2$ spełnia warunki zadania.

Niestety, z faktu, że dla obserwatora O' Elvis Presley jeszcze żyje, nie wynika, że Elvis zaśpiewa temu obserwatorowi nowe, nie znane nam piosenki.

Rozwiązanie zadania 8.

Na pręt działa siła elektromagnetyczna $F = BId$, gdzie prąd $I = (U - Bvd)/R$, przy czym R jest oporem elektrycznym układu, a Bvd – wyindukowaną siłą elektromotoryczną. Siła przyspieszająca belkę będzie niezerowa jeśli I będzie niezerowe, czyli dla $v < U/(Bd)$. Czyli $U/(Bd)$ jest prędkością graniczną belki.

Rozwiązanie zadania 9.

Ponieważ oba przedmioty mają taką samą masę i ten sam moment bezwładności względem osi prostopadłej do nich, również długości prętów w obu przypadkach są takie same (co można też odczytać z rysunku), a masa każdego z prętów w przedmiocie (b) jest dwa razy mniejsza od masy pręta (a). W przypadku przedstawionym na rysunku jeden z prętów przedmiotu (b) jest stale prostopadły do osi obrotu, a zatem nie działa on momentem siły na wał. Ponieważ drugi pręt jest dwa razy lżejszy od pręta (a), zatem moment siły działający na wał pochodzący od przedmiotu (a) jest większy, niż moment siły pochodzący od przedmiotu (b).

Rozwiązanie zadania 10.

Silniki powinny działać tak, by wykonywać dodatnią pracę – z zasady zachowania energii ta praca spowoduje wzrost energii kinetycznej pociągu (lub pokonanie oporów ruchu). Zatem gdy pociąg wjeżdża w zakręt, silniki powinny zginać złącza międzywagonowe, a gdy wyjeżdża na prosty odcinek — wyprostowywać je. Gdy pociąg jedzie po fragmencie toru o stałym promieniu łuku (kąt zgięcia jest stały), silniki nie wykonują pracy i nie mogą być wykorzystane do napędu pociągu.

Rozwiązanie zadania 11. Na Księżycu pierwsza prędkość kosmiczna to ok. $1{,}68$ km/s, zatem przy poziomym kierunku strzału pocisk nie spadnie na powierzchnię Księżyca. Czyli maksymalny zasięg jest nieskończony.

Rozwiązanie zadania 12.

Zewnętrzne pole elektryczne powoduje rozsunięcie ładunków w rozważanej dielektrycznej kulce i powstanie niezerowego momentu dipolowego, w uproszczeniu równego Qd, gdzie d jest odległością między wyindukowanymi ładunkami $+Q$ i $-Q$. Można przyjąć, że d ma stałą wartość (w przybliżeniu równą promieniowi kulki). Przy dwukrotnym wzroście ładunku q, dwukrotnie wzrośnie natężenie wytwarzanego przez nie pola elektrycznego, a w konsekwencji o czynnik 2 wzrośnie wartość każdego z wyindukowanych ładunków. Zatem siła działająca na kulkę (proporcjonalna do $q \cdot Q$) wzrośnie czterokrotnie.

Rozwiązanie zadania 13.

Jeśli walec ma niezerową wysokość, to siła tarcia hamująca ruch postępowy klocka spowoduje, że przednia (zgodnie z kierunkiem ruchu walca) część walca będzie naciskała na podłoże mocniej niż tylna. Zatem siła tarcia działająca na przednią część podstawy walca będzie miała dużą składową prostopadłą do kierunku ruchu, przeważającą nad tą składową dla innych miejsc podstawy. Tor ruchu walca ulegnie odchyleniu w lewo.

Rozwiązanie zadania 14.

Z powodu falowej natury światła, na krawędzi przedmiotów ulega ono ugięciu (dyfrakcji). Jeśli kulka jest mała, to ugięte światło dobiegnie do osi równoległej do pierwotnego kierunku biegu światła i przechodzącej przez środek kulki.Tu światło ugięte na różnych fragmentach brzegu kulki ulega interferencji – konstruktywnej ze względu na jednakową przebytą drogę. Na ekranie zaobserwujemy jasny punkt. Zatem d) – przyczyną zjawiska są zjawiska falowe – dyfrakcja i interferencja światła.

Uwaga: omawiane zjawisko znane jest jako plamka Poissona.

Rozwiązanie zadania 15.

W wyniku rozpadu wydziela się energia powodująca wzrost temperatury kuli. Ponieważ w drugim przypadku liczba rozpadów jest znacznie mniejsza niż w pierwszym, całkowita energia wydzielana w pierwszej kuli będzie większa i kula ta będzie miała wyższą temperaturę. Zatem kule o wyższej temperaturze będą zawierały izotop ^{238}Pu.