LVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (2008/2009). Stopień II, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

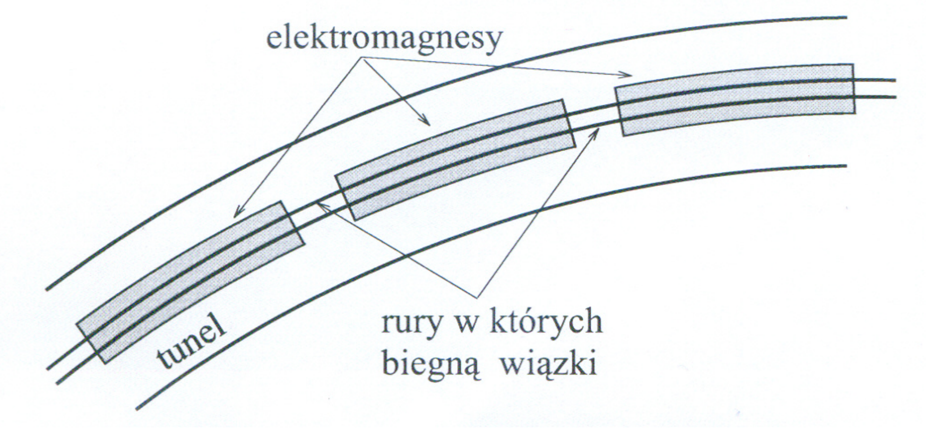
Nazwa zadania: Wielki Zderzacz Hadronów

Działy: Fizyka jądrowa

Słowa kluczowe: Wielki Zderzacz Hadronów, elektromagnesy, protony, temperatura, pole magnetyczne

Zadanie teoretyczne – T1, zawody II stopnia, LVIII OF.

W Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) w CERN pod Genewą protony o energii $E = 7 \cdot 10^{12}$ eV będą krążyć w tunelu o kształcie zbliżonym do torusa. Mają to być dwie wiązki, każda w osobnej rurze o promieniu wewnętrznym r = 0,028 m (rys. l). Tor ruchu protonów jest zakrzywiany przez 1232 nadprzewodzące elektromagnesy, z których każdy ma długość (wzdłuż kierunku biegu wiązki) l_0 = 14,3 m. Każdy z tych elektromagnesów wytwarza wewnątrz przechodzących przez niego fragmentów rur w przybliżeniu jednorodne pole magnetyczne. W każdym z ośmiu sektorów, na jakie podzielony jest cały tunel, elektromagnesy są połączone szeregowo w jeden obwód elektryczny. W przypadkach awaryjnych w ten obwód włączany jest specjalny opornik oddający ciepło do bloku stali o masie M = 8000 kg, a zasilanie jest odłączane.



Rys. 1. Szkic fragmentu tunelu LHC.
Pominięto niektóre elementy występujące w rzeczywistości.
Skala nie jest zachowana.

Oblicz wzrost ΔT temperatury takiego bloku w przypadku awaryjnego zmniejszenia do zera natężenia prądu płynącego w elektromagnesach (a tym samym zmniejszenia do zera natężenia pola magnetycznego) w jednym z ośmiu sektorów.

Przyjmij, że energia pola magnetycznego na zewnątrz rur jest w przybliżeniu równa energii pola magnetycznego wewnątrz rur (taka zależność wynika z rozważenia idealnego zagadnienia, w którym prąd płynie tylko po powierzchni rur, a na zewnątrz nie ma magnetyków).

Pomiń straty energii związane z promieniowaniem elektromagnetycznym i oddawaniem ciepła przez blok do otoczenia.

Prędkość światła $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, przenikalność magnetyczna próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ VsA^{-1}m^{-1}, masa protonu $m \approx 1 \cdot 10^9$ eV / c^2, ciepło właściwe stali c_w = 450 J/ (kg · K), ładunek protonu $q \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, 1 eV $\approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

Informacja dodatkowa: Prócz magnesów zakrzywiających tor protonów, w *tunelu znajdują się też magnesy ogniskujące* i *korygujące wiązkę. Tych magnesów tu nie rozważamy.* Z *tego względu* i z *powodu niedokładnego oszacowania energii pola magnetycznego poza rurami,* w *których biegnie wiązka, rzeczywisty wzrost temperatury jest większy, niż wynika* z *rozwiązania tego zadania.*

Rozwiązanie

Gdy cząstka o ładunku q porusza się z prędkością $\vec{v}$ polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, działa na nią siła

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \qquad (1)$$

Ta siła powoduje zmianę pędu $\vec{p}$ cząstki

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \vec{F}. \qquad (2)$$

Ponieważ cząstka jest relatywistyczna, jej pęd jest dany wzorem

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{v}\frac{E}{c^2}, \qquad (3)$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością cząstki, m - jej masą, E- energią całkowitą, a c - prędkością światła. Ponieważ $\vec{F}$, jest prostopadłe do $\vec{v}$, siła nie zmienia wartości prędkości ani energii. Zatem w tym przypadku równanie (2) sprowadza się do

$$\frac{E}{c^2}\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (4)$$

gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem cząstki. Jest to przyspieszenie dośrodkowe, ponieważ $\vec{a}$ jest prostopadłe do $\vec{v}$. Z drugiej strony przyspieszenie dośrodkowe jest równe $a = v^2 / R$. Zatem nasza cząstka porusza się po okręgu o promieniu R

$$R = \frac{vE}{qBc^2}. \qquad (5)$$

Skoro są 1232 magnesy w sumie zmieniające kierunek biegu cząstki o 360°, to cząstka wewnątrz magnesu porusza się po okręgu o promieniu

$$R = \frac{1232 l_0}{2\pi}. \qquad (6)$$

Ze wzorów (5) i (6) możemy wyznaczyć indukcję pola magnetycznego wewnątrz magnesu

$$B = \frac{2\pi E v}{qc^2 1232 l_0}. \qquad (7)$$

Prędkość v możemy wyznaczyć ze związku

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{8}$$

ale ponieważ w naszym zagadnieniu $E/(mc^2)$ jest duże, możemy we wzorze (7) przyjąć

$$v \approx c$$

Daje to

$$B = \frac{2\pi E}{qc1232l_0} \approx \tag{9}$$

$$\approx 8{,}3\ \mathrm{T}. \tag{10}$$

Sumaryczna objętość obu rur wewnątrz jednego magnesu wynosi

$$V_1 = \pi r^2 l_0 \cdot 2. \tag{11}$$

Zatem sumaryczna energia pola magnetycznego wewnątrz fragmentów rur przechodzących przez elektromagnesy znajdujące się w jednym sektorze wynosi

$$W_{\mathrm{magwew/sektor}} = \frac{1232}{8} \cdot \frac{V_1 B^2}{2\mu_0} = \tag{12}$$

$$= \frac{\pi^3 r^2 (E/q)^2}{2\mu_0 c^2 1232 l_0}. \tag{13}$$

Przyjmując zgodnie z założeniem z. treści zadania, że energia pola magnetycznego na zewnątrz rur jest równa powyższej, całkowita energia pola magnetycznego w jednym sektorze wynosi

$$W_{\mathrm{mag/sektor}} = \frac{\pi^3 r^2 (E/q)^2}{\mu_0 c^2 1232 l_0} \approx \tag{14}$$

$$\approx 0{,}6\ \mathrm{GJ}. \tag{15}$$

Gdy natężenie prądu zmaleje do zera, zmaleje do zera również energia pola magnetycznego. Zgodnie z założeniami, cała zmiana energii pola magnetycznego zostanie zużyta na podgrzanie bloku o masie $M = 8 \cdot 10^3$ kg i cieple właściwym $c_w = 450$ J/(kg · K), zatem temperatura wzrośnie o

$$\Delta T = \frac{W_{\mathrm{mag/sektor}}}{Mc_w} = \frac{\pi^3 r^2 (E/q)^2}{\mu_0 c^2 1232 l_0 M c_w} \approx \tag{16}$$

$$\approx 166\,^\circ\mathrm{C}. \tag{17}$$

Proponowana punktacja

1. Związek między promieniem okręgu, po jakim porusza się proton, indukcją pola magnetycznego i energią oraz prędkością protonu (wzór (5) lub równoważny) 3 pkt.
2. Energia pola magnetycznego wewnątrz rur w jednym sektorze (wzór (12) lub równoważny) wyrażona przez B 3 pkt.
3. Energia pola magnetycznego w jednym sektorze (wzór (14)) wyrażona przez E 2 pkt.
4. Szukany przyrost temperatury (wzór (16)) 2 pkt.
5. Wartość liczbowa przyrostu temperatury (wzór (17)) 1 pkt.