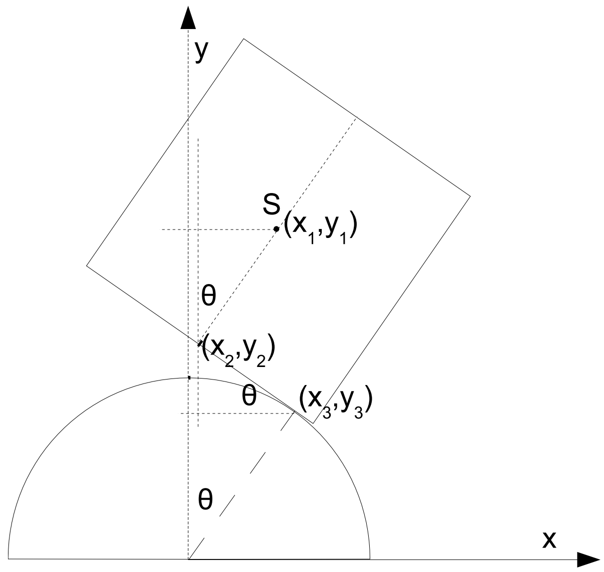
Rozwiązanie zad 1.

Rozstrzygnięcia, czy opisane ustawienie prostopadłościanu jest stanem równowagi trwałej można dokonać analizując przemieszczenie środka masy S podczas wychylenia (patrz rysunek). Zauważmy, że ponieważ podstawa prostopadłościanu jest płaska, wystarczy rozpatrywać wychylenie prostopadłościanu tylko w jednej, dowolnie wybranej płaszczyźnie. Umieśćmy początek układu współrzednych w środku podstawy półkuli i skierujmy oś y pionowo do dóry, a oś x – poziomo, zgodnie z kierunkiem wychylenia klocka. Niech $(x_1,\ y_1)$ oznacza współrzędne środka masy klocka, $(x_2,\ y_2)$ – współrzędne środka podstawy klocka, a $(x_3,\ y_3)$ – współrzędne punktu styczności klocka z półkulą. Kąt wychylenia klocka oznaczmy przez θ.



I sposób – rozważenie momentów sił względem chwilowej osi obrotu.

Warunkiem równowagi jest, aby moment siły ciężkości klocka względem chwilowej osi obrotu przeciwstawiał się wychyleniu klocka. Ponieważ ponieważ ta oś przechodzi przez przez punkt styczności klocka z półkulą, oznacza to, że dla $x_3 > 0$ (tak jak na rysunku) powinno być $x_1 - x_3 < 0$.

Ponieważ klocek toczy się po półkuli bez poślizgu, odległość środka podstawy klocka od punktu styczności klocka z półkulą wynosi $R\theta$. Stąd

$$x_2 - x_3 = -R\theta\cos\theta. \tag{1}$$

Z rozważań geometrycznych dostaniemy

$$x_1 - x_2 = \frac{L}{2}\sin\theta, \tag{2}$$

a zatem

$$x_1 - x_3 = \frac{L}{2}\sin\theta - R\theta\cos\theta. \tag{3}$$

Dla małych θ otrzymamy

$$x_1 - x_3 \approx \frac{L}{2}\theta - R\theta = \left(\frac{L}{2} - R\right)\theta. \tag{4}$$

Ponieważ warunek równowagi oznacza $x_1 - x_3 < 0$ dla $\theta > 0$, otrzymujemy

$$\frac{L}{2} - R < 0.$$

Stan równowagi mamy więc dla

$$L < 2R. \tag{5}$$

II sposób – rozważenie energii potencjalnej.

Dane położenie jest położeniem równowagi trwałej, jeśli energia potencjalna jest tam (lokalnie) minimalna. W rozważanym zagadnieniu energia potencjalna jest równa mgh, gdzie m jest masą klocka, a $h = y_1$, zatem wystarczy rozważyć wysokość, na jakiej znajduje się środek masy.

W stanie równowagi ta wysokość wynosi

$$h_0 = R + \frac{L}{2}.$$

Po wychyleniu prostopadłościanu o kąt θ, wysokość na jakiej znajdzie się środek masy będzie równa

$$h = y_1 = (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + y_3,$$

gdzie, jak wynika z rysunku, mamy

$$y_1 - y_2 = \frac{L}{2}\cos\theta, \tag{6}$$

$$y_2 - y_3 = R\theta\sin\theta, \tag{7}$$

$$y_3 = R\cos\theta. \tag{8}$$

Przy obliczeniu $y_2 - y_3$ uwzględniliśmy, że ze względu na brak poślizgu odległość środka podstawy klocka od punktu styczności klocka z półkulą wynosi $R\theta$.

Zmiana wysokości środka masy wynosi zatem,

$$\Delta h = y_1 - h_0 = \left(\frac{L}{2} + R\right)(\cos\theta - 1) + R\theta\sin\theta. \tag{9}$$

Położenie początkowe będzie położeniem równowagi trwałej, jeśli wraz ze wzrostem kąta θ będzie wzrastało Δh. W przybliżeniu małych θ mamy

$$\Delta h \approx \left(R - \frac{L}{2}\right)\frac{\theta^2}{2}. \tag{10}$$

Z powyższego dostajemy warunek (5): $L < 2R$.

Zamiast stosować przybliżenie małych θ, możemy obliczyć drugą pochodną Δh względem θ dla $\theta = 0$ (pierwsza pochodna jest w tym punkcie równa 0 ze względu na symetrię Δh jako funkcji θ):

$$\left.\frac{d^2\Delta h}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = \left[-\left(\frac{L}{2} + R\right)\cos\theta + 2R\cos\theta - R\theta\sin\theta\right]_{\theta=0} = R - \frac{L}{2}. \tag{11}$$

Ponieważ funkcja ma minimum w danym punkcie, gdy druga pochodna jest tam większa od zera, a pierwsza pochodna się zeruje, dostajemy znowu warunek (5).

Punktacja:

I sposób

Zauważenie, że warunkiem równowagi jest, by $x_1 - x_3 < 0$ gdy $x_3 > 0$ (lub $x_1 - x_3 > 0$ gdy $x_3 < 0$) – 2 pkt.

Określenie odległości w poziomie środka podstawy klocka od jego środka masy (wzór (2)) – 1 pkt.

Określenie odległości w poziomie punktu styczności od środka podstawy klocka (wzór (1)) – 2 pkt.

Określenie odległości w poziomie środka masy klocka od punktu styczności z kulą (wzór (3) – 1 pkt.
Wzór (4) na odległość w poziomie środka masy klocka od punktu styczności z kulą w przybliżeniu małych odchyleń – 2pkt.
Warunek równowagi (wzór (5)) – 2 pkt.
II sposób
Określenie odległości pionie środka podstawy klocka od jego środka masy (wzór (6)) – 1 pkt.
Określenie odległości w pionie punktu styczności od środka podstawy klocka (wzór (7)) – 2 pkt.
Określenie, na jakiej wysokości będzie punkt styczności klocka z półkulą po odchyleniu klocka (wzór (8)) – 1 pkt.
Całkowita zmiana wysokości klocka (wzór (9)) – 2 pkt.
Wzór (10) na zmianę wysokości środka masy klocka w przybliżeniu małych odchyleń lub druga pochodna w $\theta = 0$ wysokości środka masy klocka (wzór (11)) – 2 pkt.
Warunek równowagi (wzór (5)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zad 2.
Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie, po pominięciu jego samoindukcji, jest równa

$$U = -\frac{d\left(BS\cos\alpha\right)}{dt} = BS\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}, \tag{12}$$

gdzie $S = a^2$, zaś α jest mierzonym od pionu kątem odchylenia płaszczyzny, w której w danym momencie znajduje się drut.
Prędkość kątową $d\alpha/dt$ możemy wyznaczyć z zasady zachowania energii. Po pominięciu energii zgromadzonej w kondensatorze mamy

$$\frac{I}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - mgh\cos\alpha = 0, \tag{13}$$

gdzie

$$h = 2a/3 \tag{14}$$

jest odległością środka masy drutu od osi obrotu, a

$$I = 5ma^2/9 \tag{15}$$

– momentem bezwładności drutu względem osi obrotu. Z powyższego

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2mgh}{I}\cos\alpha}. \tag{16}$$

Zatem

$$U = BS\sin\alpha\sqrt{\frac{2mgh}{I}\cos\alpha}. \tag{17}$$

Funkcja $\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}$ ma maksimum dla $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ równe

$$\max(\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}) = \sqrt[4]{3}\sqrt{2}/3 \approx 0,62. \tag{18}$$

(Położenie maksimum można wyznaczyć z warunku $d\left(\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}\right)/d\alpha = \left(3\cos^2\alpha - 1\right)/\sqrt{\cos\alpha}/2 = 0$, ale zgodnie z treścia zadania można też było oszacować jego wartość na podstawie wykresu funkcji.)
Maksymalna siła elektromotoryczna jest zatem równa

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{8}{15}}\sqrt[4]{3}Ba^2\sqrt{\frac{g}{a}} \approx 1,0\cdot Ba^2\sqrt{\frac{g}{a}}. \tag{19}$$

Ponieważ dioda przepuszcza prąd tylko w jedna stronę, napięcie między okładkami kondensatora będzie równe maksymalnej sile elektromotorycznej.
Podstawiając wartości liczbowe B, a, g otrzymamy

$$U_{\max} \approx 0,05 \text{ V}. \tag{20}$$

Punktacja:
Ogólny wzór na wyindukowaną zgodnie z prawem Faradaya siłę elektromotoryczną (wzór (12))) – 2 pkt.
Wzór (16) na prędkość kątową ramki – 2 pkt.
Moment bezwładność ramki względem osi obrotu (wzór (15)) oraz odległość środka masy ramki od osi obrotu (wzór (14)) – 1 pkt.
Zależność wyindukowanej siły elektromotorycznej od kąta odchylenia ramki (wzór (17)) – 1 pkt.
Zauważenie, że szukane napięcie na kondensatorze jest równe maksymalnej wyindukowanej sile elektromotorycznej – 2 pkt.
Szukane napięcie na kondensatorze (wzór (19)) – 1 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (20)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.
Energia sprężonego powietrza będzie maksymalnie wykorzystana, jeśli opuszczając silnik będzie ono miało ciśnienie i temperaturę otoczenia, a przemiana będzie odwracalna. Wynika to z następujących rozważań: wylatujące powietrze nie może mieć ciśnienia mniejszego niż otoczenie, bo inaczej nie opuściło by silnika. Jeśli to ciśnienie byłoby większe od ciśnienia otoczenia, to rozprężając powietrze można by było uzyskać dodatkową pracę. A gdyby temperatura wylatującego powietrza była inna niż temperatura otoczenia, to można by zbudować silnik cieplny wykorzystujący tę różnicę temperatur.
W rozważanym przypadku najprościej jest rozważyć rozprężanie izotermiczne. Zauważmy jednak, że jeśli stan końcowy i początkowy oraz parametry otoczenia są ustalone, to praca wykonana w dowolnym procesie odwracalnym jest taka sama,.
Zatem energia, którą można wykorzystać jest równa pracy wykonanej przez gaz przy rozprężaniu izotermicznym

$$E = pV \ln \frac{p}{p_0}, \tag{21}$$

gdzie p jest ciśnieniem w zbiorniku o objętości V, p_0 – ciśnieniem otoczenia.
Objętość zbiornika jest równa

$$V = \pi r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{22}$$

W naszym przypadku otrzymamy

$$E = 48\text{MJ} \tag{23}$$

Dla silnika spalinowego o sprawności 30%, przyjmując, że ciepło spalania benzyny jest równe 44MJ/kg $\approx 32\text{MJ}/l$, otrzymujemy, że energia potrzebna do przejechania 100km wynosi

$$E_{100} = 0.3 \cdot 32 \text{ MJ}/l \cdot 5\ l = 48 \text{ MJ}. \tag{24}$$

Zatem przy założeniu, że silnik osiąga maksymalną teoretyczną sprawność, odległość jaką może przebyć rozważany samochód wynosi około 100km.
Uwaga: Ze wzoru na energię wewnętrzną gazu $U = c_V NT$ wynika, że energia wewnętrzna gazu w zbiorniku i po opuszczeniu silnika jest taka sama. A zatem cała praca wykonana przez rozpatrywany silnik jest równa ciepłu pobranemu z otoczenia. To oznacza, że dużym praktycznym problemem przy konstruowaniu silnika takiego typu jest wydajne ogrzewanie rozprężającego się powietrza.

Punktacja:
Zauważenie, że silnik wykona maksymalną pracę, jeśli pracuje w sposób odwracalny, a wylatujące powietrze ma temperaturę i ciśnienie takie jak otoczenie – 3pkt.
Całkowita praca, jaką może wykonać silnik przy rozprężaniu powietrza (wzór (21)) – 2 pkt.
Wzór (22) na objętość zbiornika – 1 pkt.
Wartość liczbowa całkowitej pracy, jaką może wykonać silnik przy rozprężaniu powietrza (wzór (23)) – 1 pkt.
Wyznaczenie energii potrzebnej do przejechania 100km na podstawie zużycia paliwa przez samochód z silnikiem spalinowym (wzór (24)) – 1 pkt.
Wynik liczbowy (ok. 100km – wynik może być inny, jeśli przyjęta została inna wartość ciepła spalania benzyny) na odległość jaką może przebyć rozważany samochód – 2 pkt.

Uwaga dla sprawdzających: Podany w treści zadania wzór na pracę wykonaną przez gaz doskonały w trakcie rozprężania adiabatycznego ma błędny współczynnik. Przedstawione rozwiązanie nie korzysta z tego wzoru, jednak zgodnie z uwagą w treści zadania, maksymalną pracę można uzyskać w dowolnym procesie odwracalnym, również zawierajacym rozprężanie adiabatyczne. Rozprężony w ten sposób gaz należałoby jednak potem w sposób odwracalny podgrzać, np. używając silnika Carno działającego miedzy otoczeniem a gazem (o zmiennej temperaturze). Otrzymamy:
Praca wykonana w procesie adiabatycznym

$$W_{ad} = k \cdot pV \left[1 - \left(\frac{p_1}{p} \right)^{R/(c_V+R)} \right],$$

gdzie p, V są początkowym ciśnieniem i objętością gazu w zbiorniku, p_1 – ciśnieniem gazu na końcu tego procesu, a k – współczynnikiem. Rozsądne jest przyjęcie, że po tym rozprężaniu gaz będzie miał objętość równą objętości końcowej $V_0 = pV/p_0$ (w przeciwnym razie prócz podgrzewania, trzeba go będzie jeszcze sprężać lub rozprężać). Korzystając z równania adiabaty $pV^\kappa = p_1 V_0^\kappa$, gdzie $\kappa = (c_V + R)/c_V$, otrzymamy

$$p_1 = p \left(\frac{V}{V_0} \right)^\kappa = p \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa,$$

zatem

$$W_{ad} = k \cdot pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa R/(c_V+R)} \right] = k \cdot pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_V} \right].$$

Uwzględniając, że mamy do czynienia z $n = pV/(RT_0)$ molami gazu, jego temperatura gazu po tym procesie będzie równa

$$T_1 = \frac{p_1 V_0}{nR} = \frac{p_1 V_0}{pV} T_0 = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa-1} T_0.$$

Pobierając ciepło z otoczenia o temperaturze T_0 i podgrzewając w procesie odwracalnym n moli gazu od temperatury T do $T + dT$, możemy uzyskać pracę

$$dW = \frac{T_0 - T}{T} n c_v dT,$$

zatem całkowita praca uzyskana przy podgrzewaniu gazu wynosi

$$\begin{aligned} W_{\text{podg}} &= \int_{T_1}^{T_0} \frac{T_0 - T}{T} n c_v dT = n c_v \left(T_0 \ln \frac{T_0}{T_1} - T_0 + T_1 \right) \\ &= \frac{c_v}{R} pV \left[\ln \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1-\kappa} - 1 + \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa - 1} \right] \\ &= pV \ln \frac{p}{p_0} + pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_v} \right]. \end{aligned}$$

Zatem cała praca jest równa

$$W = W_{ad} + W_{\text{podg}} = pV \ln \frac{p}{p_0} + \left(k - \frac{c_v}{R} \right) pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_v} \right].$$

Przyjmując $k = c_v/R$ dostaniemy wzór (21), jednak dla współczynnika podanego w treści zadania dostajemy błędnie

$$W = pV \ln \frac{p}{p_0} + \left(\frac{R}{c_v} - \frac{c_v}{R} \right) pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_v} \right].$$

Jeśli uczeń, przeprowadzając przedstawione rozumowanie, uwzględniając $k = R/c_v$, dostał powyższy wzór, ten fragment rozwiązania należy uznać za poprawny.
Jeszcze innym sposobem wyznaczenia szukanej pracy, jest rozprężenie adiabatyczne do ciśnienia otoczenia p_0, a następnie izobaryczne podgrzewanie gazu przy użyciu silnika Carno. Wynik, jaki uzyskamy w takim przypadku, jest następujący

$$W = pV \ln \frac{p}{p_0} + \left(k - \frac{c_v}{R} \right) pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/(c_v+R)} \right].$$