

### LVII OLIMPIADA FIZYCZNA (2007/2008). Stopień III, zadanie doświadczalne – D

**Źródło:** Komitet Główny Olimpiady Fizycznej.

**Autor:** Andrzej Wyszomłek – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej, IFD UW.

**Nazwa zadania:** Wyznaczanie współczynnika lepkości miodu.

**Działy:** Mechanika

**Słowa kluczowe:** siła, lepkość, tarcie, współczynnik, moment, ruch, obrót, okres, prędkość, kątowna, ciecz, ciężarek, soczewka

#### Zadanie doświadczalne – D, zawody III stopnia, LVII OF.

Masz do dyspozycji:

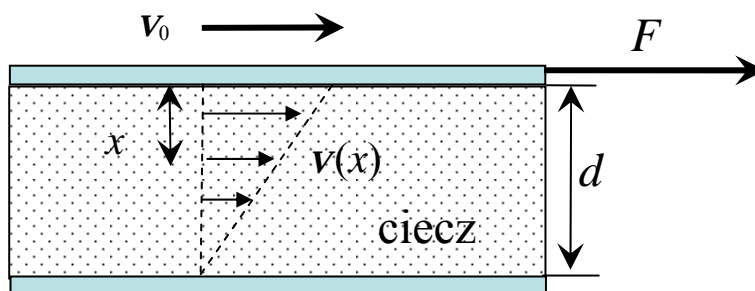
- soczewkę dwuwypukłą o identycznych promieniach krzywizny wynoszących  $R = 165$  mm,
- płaską szklaną płytkę,
- kawałek rurki plastikowej,
- nitkę,
- 3 ciężarki o masie  $(4,6 \pm 0,1)$  g każdy,
- stoper,
- dwustronną taśmę klejącą,
- plastelinę,
- dwie szklane probówki,
- papier milimetrowy,
- linijkę,
- płynny miód z łyżeczką do nabierania go z naczynia.

Wyznacz współczynnik lepkości miodu.

**Uwaga:** Współczynnik lepkości cieczy  $\eta$  można zdefiniować poprzez wzór wiążący siłę  $F$  potrzebną do podtrzymania jednostajnego ruchu płytki nakrywającej warstwę cieczy o niewielkiej (w porównaniu z rozmiarami płytki) grubości. Jeśli prędkość płytki jest niewielka, to można uznać, że prędkość  $v(x)$  cieczy maleje liniowo ze wzrostem odległości  $x$  od płytki (patrz rysunek) i zachodzi związek:

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{d}$$

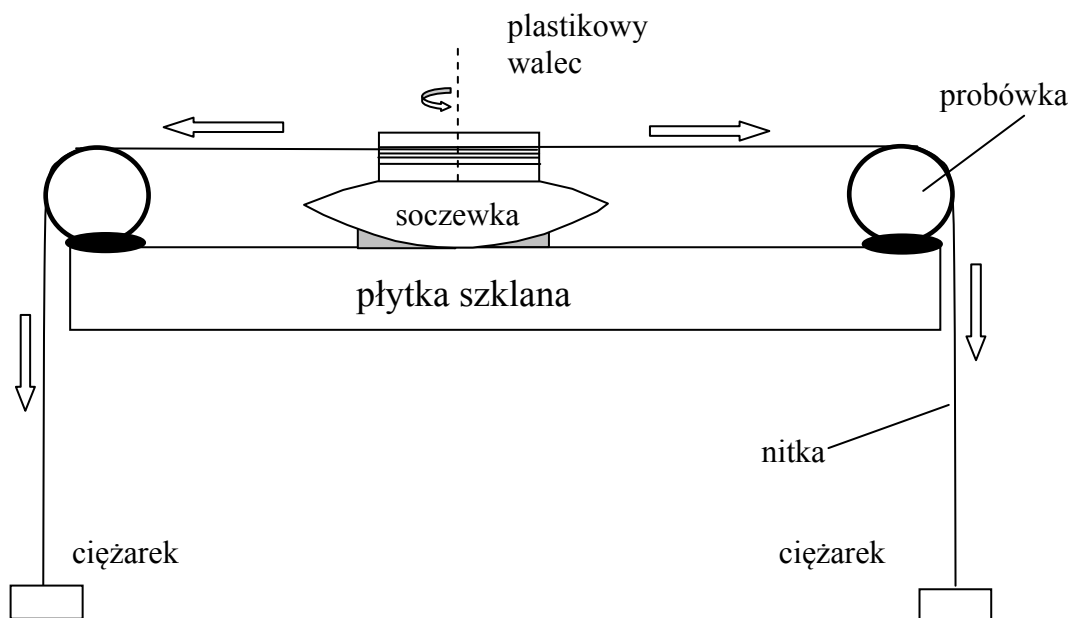
gdzie  $S$  – powierzchnia płytki,  $v_0$  – prędkość płytki,  $d$  – grubość warstwy cieczy.



## Rozwiązanie

### Część teoretyczna

Rozwiązanie zadania wymaga zbudowania układu eksperymentalnego, w którym można byłoby badać jednostajny ruch jakiegoś przedmiotu przylegającego do warstewki miodu. Taki warunek spełnia układ przedstawiony schematycznie na rys. 1. Układ zestawić można w następujący sposób. Używając dwustronnej taśmy klejącej do soczewki mocujemy centrycznie rurkę plastikową. Na rurkę nawijamy nitkę, z przymocowanymi na dwóch końcach ciężarkami. Płytkę szklaną kładziemy na stole tak, aby jej część o długości kilku centymetrów wystawała poza krawędź stołu. Następnie na środek wystającej poza krawędź stołu części płytki nakładamy niewielką ilość miodu i umieszczamy w nim centralnie soczewkę. Dociskamy soczewkę do powierzchni płytki. Na brzegach płytki mocujemy przy użyciu plasteliny plastikowe kołki i przeciągamy przez nie końce nitki z ciężarkami. Zwisające ciężarki naciągają końce nitki i powodują, że soczewka zaczyna się obracać. W chwili, gdy ustali się równowaga pomiędzy momentem siły ciężkości i momentem siły lepkości oraz oporami ruchu wynikającymi z tarcia nitki o powierzchnie próbek, ciężarki zaczynają poruszać się ruchem jednostajnym. Najtrudniejszy element rozwiązania zadania polega na znalezieniu związku pomiędzy prędkością obrotową soczewki a wartością współczynnika lepkości miodu.



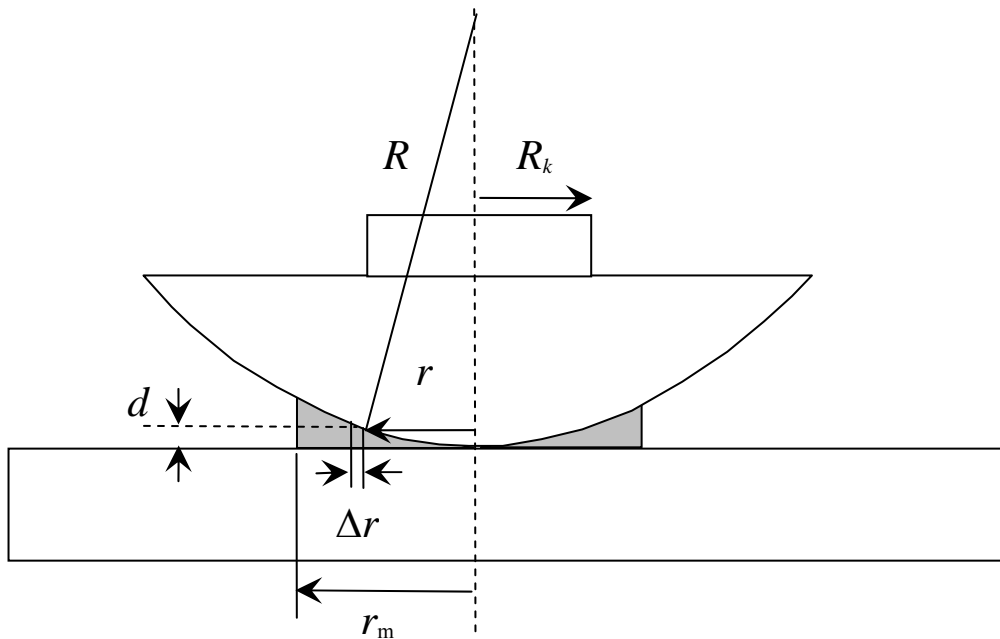
Rys. 1

Założmy, że potrafimy tak uformować miód pod soczewką, że zajmie on wnętrze koła o promieniu  $r_m$ . Prędkość kątową soczewki  $\omega$  ustala się w warunkach, gdy moment sił lepkości miodu jest równy momentowi siły ciężkości pomniejszonej o siłę tarcia nitek o powierzchnię próbek:

$$M_c = 2mgR_k - 2F_T, \quad (1)$$

gdzie  $R_k$  – promień rurki przyklejonej do soczewki,  $m$  – masa obciążnika,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $F_T$  – siła tarcia nitki o próbkę.

Żeby znaleźć wyrażenie na moment sił lepkości działający na soczewkę, podzielmy w myśli obszar miodu na pierścienie o promieniu  $r$  i niewielkiej szerokości  $\Delta r$ .



Rys. 2

Grubość warstwy miodu  $d$  w odległości  $r$  od osi obrotu jest określona związkiem (patrz rys. 2):

$$(R - d)^2 + r^2 = R^2, \quad (2)$$

co można zapisać w postaci

$$(2R + d)d = r^2. \quad (3)$$

Ponieważ w rozważanej sytuacji spełniony jest warunek  $R \gg d$ , to po lewej stronie równania (3) możemy pominąć  $d$  w nawiasie i otrzymujemy:

$$d = \frac{r^2}{2R} \quad (4)$$

Przyczynek  $\Delta F$  do siły oporu tarcia lepkiego pomiędzy miodem i soczewką dla rozważanego pierścienia wyniesie więc:

$$\Delta F = \eta \Delta S \frac{v_0}{d} = \eta \Delta S \frac{\omega r}{r^2} 2R = \eta \frac{2R \Delta S \omega}{r}, \quad (5)$$

zaś moment siły lepkości względem osi obrotu:

$$\Delta M = \Delta F r = \frac{2R \Delta S \omega}{r} r = 2\eta R \Delta S \omega \quad (6)$$

Warto zauważyć, że przyczynek do momentu siły lepkości pochodzący od pierścienia nie zależy od jego średnicy! Zatem sumaryczny moment sił lepkości zależy tylko od całkowitej powierzchni warstwy miodu  $S = \pi r^2$  i wyniesie:

$$M = 2\eta R S \omega = 2\eta R \pi r_m^2 \omega. \quad (7)$$

Z porównania wyrażeń (1) oraz (7) wynika, że w sytuacji gdy mamy do czynienia z jednostajnym obrotem soczewki zachodzi związek:

$$2\eta R \pi r_m^2 \omega = 2(mg - F_T) R_k. \quad (8)$$

Prędkość kątową soczewki  $\omega = 2\pi/T$  można wyznaczyć mierząc okres jej obrotu  $T$ .

Rozważmy najpierw sytuację, gdy siły tarcia nitki o powierzchnie próbek są znikomo małe. Wtedy związek (8) można przedstawić w postaci:

$$T = \frac{4\pi^2\eta R}{2mgR_k} r_m^2. \quad (9)$$

Zatem okres obrotu soczewki powinien być liniową funkcją kwadratu promienia obszaru miodu stykającego się z soczewką:

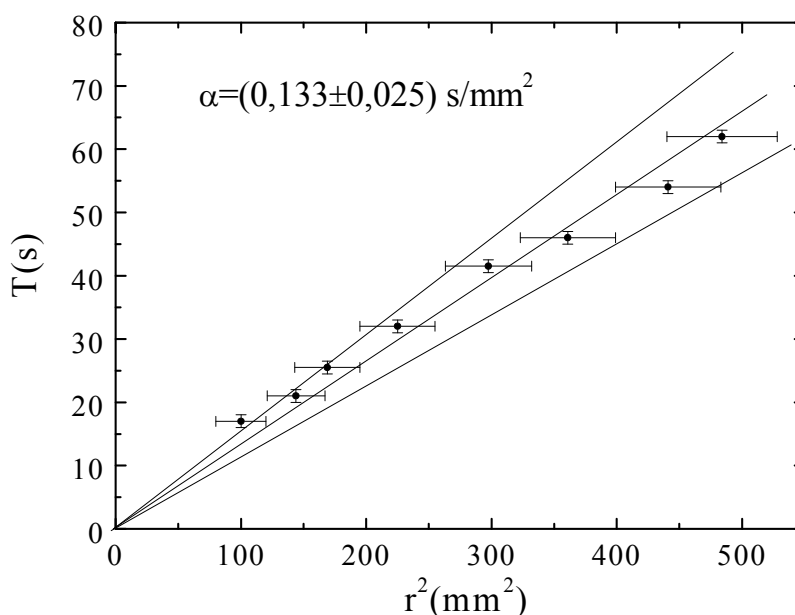
$$T = \alpha r_m^2, \quad (10)$$

gdzie  $\alpha = \frac{2\pi^2 R}{mgR_k} \eta$ .

Po wykonaniu pomiarów czasu obrotu soczewki dla kilku różnych ilości miodu pod soczewką wystarczy więc sporządzić wykres zależności  $T(r_m^2)$  i następnie po dopasowaniu prostej wyznaczyć współczynnik lepkości  $\eta$ . Dyskusją wpływu sił tarcia na uzyskane wyniki zajmiemy w części doświadczalnej.

### Część doświadczalna

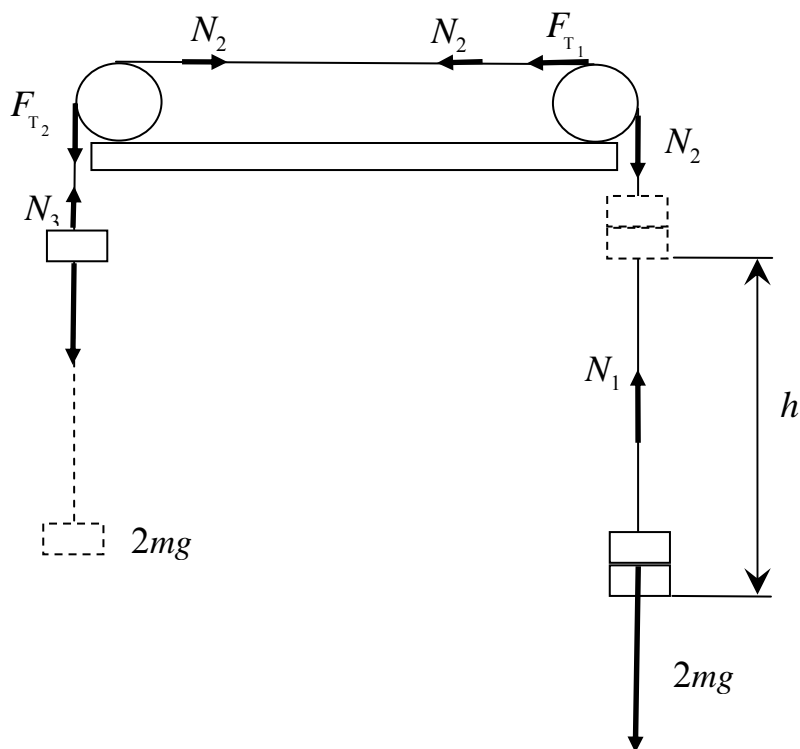
Pomiary wykonano w układzie przedstawionym na rys. 1. Okres obrotu soczewki, dla kilku dla różnych wielkości powierzchni zajmowanych przez miód pod soczewką, wyznaczono mierząc stoperem czas pełnego obrotu soczewki. Promień rurki oraz rozmiary obszaru zajmowanego przez miód można zmierzyć przy użyciu linijki. Wielkość „plamy” miodu można wyznaczyć patrząc na miód z boku. Uzyskane, wyniki pomiarów zostały przedstawione na rys. 3.



Rys. 3

Z dopasowania prostej do danych doświadczalnych uzyskano wartość współczynnika  $\alpha = (133 \pm 25) \cdot 10^{-3} \text{ s/mm}^{-2}$ . Biorąc pod uwagę, że promień krzywizny soczewki wynosił  $R = 165 \text{ mm}$ , masa ciężarka  $m = (4,6 \pm 0,1) \text{ g}$ , promień krążka  $R_k = (14,0 \pm 0,5) \text{ mm}$  otrzymujemy:  $\eta = \frac{mgR_k}{2\pi^2 R} \alpha = (23 \pm 7) \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Jak to już podkreślano w części teoretycznej w przedstawionym rozwiązaniu przyjęto, że siła tarcia nitki o powierzchnię próbki jest niewielka

i pominięto ją w rachunkach. Tak uczyniła większość rozwiązujących zadanie. Założenie to prowadzi jednak do istotnego zawyżenia uzyskanej wartości lepkości. Wielkość siły tarcia można oszacować badając ruch ciężarków przewieszonych na probówkach (rys. 4). Do jednego z końców nitki dowiadujemy dodatkowy ciężarek i mierzymy stoperem czas w jakim ciężarki pokonują odległość  $h$  (można odmierzyć ją nitką, a następnie zmierzyć długość kawałka nitki linijką). Dla odległości  $h = (60 \pm 1)$  cm, uzyskano czas  $(3,5 \pm 0,5)$  s. Co daje wartość przyspieszenia  $a = 2h/t^2 = (0,13 \pm 0,04)$  m/s<sup>2</sup>. Tak małe przyspieszenie uzyskiwane przez ciężarki sugeruje, że wartość całkowitej siły tarcia w układzie jest bardzo bliska ciężarowi jednego obciążnika. Można to sprawdzić dokładniej.



Rys. 4

Równania opisujące ruch układu mają postać:

$$\begin{cases} 2ma = 2mg - N_1 \\ N_2 = N_1 - F_{T1} \\ N_3 = N_2 - F_{T2} \\ ma = N_3 - mg \end{cases}$$

Stąd po wyeliminowaniu naciągu nitek dostajemy:

$$3ma = mg - (F_{T1} + F_{T2}), \quad (11)$$

co można zapisać w postaci

$$F_{T1} + F_{T2} = mg \left( 1 - \frac{3a}{g} \right). \quad (12)$$

Po podstawieniu wartości przyspieszenia  $a$  uzyskanego w doświadczeniu uzyskujemy wartość siły tarcia  $(0,950 \pm 0,006)mg$  (czyli zgodnie z wnioskiem jakościowym). Jeśli przyjąć, że wartość siły tarcia nitki o probówkę jest zbliżona do uzyskanej powyżej, to efektywny moment siły powodującej obrót soczewki wyniesie  $(2mg - F_T)R_k \cong mgR_k$ . Oznacza to, że wartość

współczynnika lepkości miodu będzie o połowę mniejsza od wartości uzyskanej na podstawie wzoru (9). Takie uproszczone rozumowanie nie uwzględnia jednak tego, że wartość siła tarcia nitki o probówkę przy obciążeniu dwoma ciężarkami różni od siły działającej podczas pomiaru okresu obrotu soczewki umieszczonej w miodzie.

Żeby uwzględnić wpływ siły tarcia na uzyskaną wartość współczynnika lepkości należy wyznaczyć współczynnik tarcia nitki o probówkę (lub jego funkcję). Najprościej można to zrobić wykorzystując fakt, że siła tarcia nitki o probówkę jest proporcjonalna do siły napięcia nici, tzn. że

$$F_{T_1} = \beta N_1, \quad F_{T_2} = \beta N_2. \quad (13)$$

(Było to przedmiotem zadań olimpijskich.)

Korzystając ze związków (13) naciągi nici możemy wyrazić jako funkcję siły naciągu  $N_1$ :

$$N_2 = N_1 - F_{T_1} = N_1(1 - \beta), \quad (14)$$

$$N_3 = N_2 - F_{T_2} = N_2 - \beta N_2 = N_2(1 - \beta) = N_1(1 - \beta)^2. \quad (15)$$

Stąd:

$$(1 - \beta)^2 = \frac{N_3}{N_1}. \quad (16)$$

Z równań Newtona dla ciężarków otrzymujemy wyrażenia na siły naciągu nitki:

$$N_1 = 2mg - 2ma \quad \text{oraz} \quad N_3 = mg + ma. \quad (17)$$

Zatem

$$(1 - \beta)^2 = \frac{N_3}{N_1} = \frac{mg + ma}{2(mg - ma)}, \quad (18)$$

$$\beta = 1 - \sqrt{\frac{1 + a/g}{2(1 - a/g)}}. \quad (19)$$

Znając wartość przyspieszenia ciężarków  $a = (0,13 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$  wyznaczoną w doświadczeniu otrzymujemy współczynnik  $\beta = (0,282 \pm 0,003)$ . (W sytuacji, gdy przyspieszenie jest niewielkie w porównaniu z przyspieszeniem ziemskim  $g$ , współczynnik  $\beta \cong 1 - 1/\sqrt{2}$ ). Znając wartość współczynnika  $\beta$  możemy znaleźć wartość siły naciągu nitki powodującej obrót soczewki:

$$N = mg - F_T = mg - \beta mg = mg(1 - \beta),$$

co daje liczbowo  $N = (0,718 \pm 0,002)mg$ . Tak więc prawidłowe uwzględnienie siły tarcia powoduje, że wyznaczony w doświadczeniu współczynnik lepkości miodu uzyskuje wartość  $\eta = (16,5 \pm 5,0) \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Jeśli w doświadczeniu uwzględniony został wpływ siły tarcia nitki o probówkę, to głównym czynnikiem wpływającymi niepewność pomiarową współczynnika lepkości, jest niepewność wyznaczenia promienia obszaru zajmowanego przez miód pod soczewką.

### Proponowana punktacja

1. Pomysł doświadczenia umożliwiającego wyznaczenie współczynnika lepkości miodu. do 5pkt.
2. Wyprowadzenie związku pomiędzy czasem obrotu soczewki i współczynnikiem lepkości (wzory 1 – 10, za uwzględnienie siły tarcia 2 pkt.) do 5pkt.
3. Zestawienie układu pomiarowego i wykonanie pomiarów umożliwiających wyznaczenie współczynnika lepkości miodu do 5pkt.

- 
4. Podanie poprawnego wyniku końcowego wraz z oszacowaniem niepewności pomiarowej i dyskusją podstawowych źródeł niepewności pomiarowej wyniku końcowego do 2 pkt.
  5. Dyskusja wpływu siły tarcia na uzyskany wynik do 3 pkt.