LVI OF - rozwiązania zadań - stopień I, część I

Rozwiązanie zadania 1
Rozważmy najpierw jedną staczającą się sferę o masie m i promieniu r. Z zasady zachowania energii wynika, że prędkość sfery po obniżeniu się o wysokość z spełnia związek

$$mgz = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}v^2 = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2,$$

gdzie I jest momentem bezwładności sfery względem środka masy. Ponieważ $I/(mr^2)$ jest takie samo dla każdej sfery, powyższy wzór oznacza, że prędkość sfery, a zatem również przyspieszenie, nie zależy od jej rozmiarów. Biorąc pod uwagę początkowe ustawienie sfer, oznacza to, że wewnętrzna sfera nie wpływa na ruch sfery zewnetrznej.
Odp. Prędkość będzie taka sama.

Rozwiązanie zadania 2
Ponieważ lina jest nieważka, nie ma znaczenia kąt ustawienia względem pionu fragmentu liny leżącego na szorstkiej powierzchni, ważne są tylko kierunki i wartości sił działających na końce tego fragmentu. Zatem maksymalna masa ciężaru w drugim przypadku też będzie równa m_1.

Rozwiązanie zadania 3
Ponieważ wzrośnie gęstość wody, wzrośnie siła wyporu. A zatem szalka z wodą obniży się.

Rozwiązanie zadania 4
Skoro pies wrócił do Adasia to $\phi_P - \phi_K = 2\pi$, gdzie ϕ_P jest kątem odpowiadającym zmianie położenia psa względem ziemi.
Moment bezwładności psa względem osi obrotu karuzeli jest równy $I_P = mr^2$.
Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że

$$\phi_K I_K + \phi_P I_P = 0,$$

stąd

$$\phi_K = -\frac{I_P}{I_K + I_P}2\pi = -\frac{2\pi}{I_K/(mr^2) + 1} = -36^\circ \ .$$

Rozwiązanie zadania 5
Rozważmy najpierw sytuację, w której zawodnik płynie do brzegu, następnie biegnie wzdłuż niego, a potem znowu płynie do punktu B. Korzystając z analogii z optyczną zasadą Fermata, kąt pod jakim powinien płynąć do brzegu powinien spełniać warunek

$$\frac{1}{v_w}\sin\alpha_w = \frac{1}{v_l}\sin\alpha_l,$$

gdzie α_w jest katem jaki tworzy część wodna toru z normalną do brzegu (kąt "padania") a $\alpha_l = \pi/2$ (kąt "załamania"). Zatem $\sin\alpha_w = v_w/v_l$. Stąd długość toru części wodnej wynosi $2h/\cos\alpha_w = 2h/\sqrt{1-(v_w/v_l)^2}$, a części lądowej – $d - 2h\mathrm{tg}\alpha_w = d - 2h(v_w/v_l)/\sqrt{1-(v_w/v_l)^2}$. Zatem czas dotarcia do punktu B wynosi w tym przypadku

$$\frac{2h}{\cos\alpha_w}/v_w + (d - 2h\mathrm{tg}\alpha_w)/v_l.$$

Z drugiej strony czas przepłynięcia od punktu A do B wynosi d/v_w. Zatem aby nie opłacało się płynąć do brzegu, musi być

$$\frac{2h}{\cos\alpha_w}/v_w + (d - 2h\mathrm{tg}\alpha_w)/v_l > \frac{d}{v_w},$$

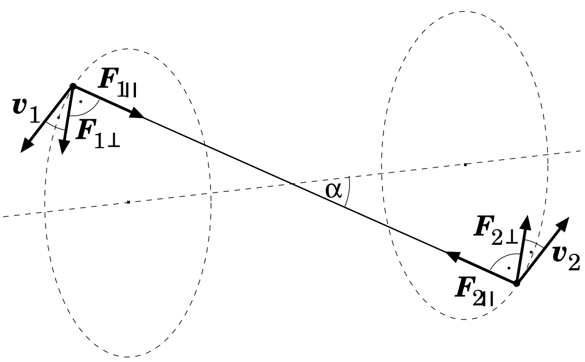
czyli

$$\frac{d}{h} < 2\frac{\cos\alpha_w}{1-\sin\alpha_w} = 2\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_w}{2}\right)$$

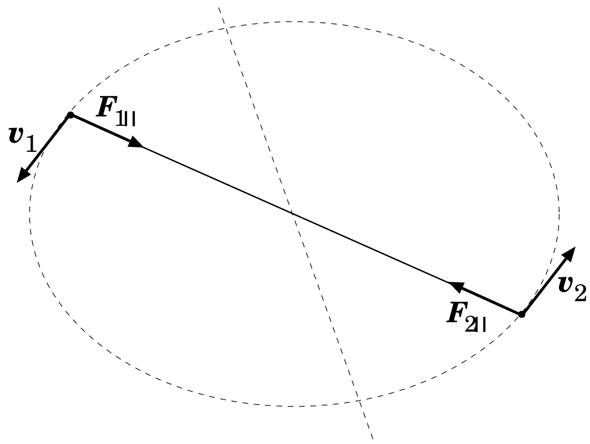
W naszym przypadku otrzymamy $\alpha_w = 30^\circ$, $2\cos\alpha_w/(1-\sin\alpha_w) = 2\sqrt{3} < 3600/1000$, zatem zawodnik powinien płynać do brzegu, pod kątem 60^0 w stosunku do niego, przebiec po lądzie, a potem płynąć pod katem 60° w stosunku do brzegu do punktu B.

Rozwiązanie zadania 6

Zauważmy, że z punktu widzenia mechaniki rozważany pręt jest równoważny dwóm identycznym punktom materialnym o sumarycznej masie równej masie pręta, połączonym nieważkim, sztywnym łacznikiem o długości l tak dobranej, żeby momenty bezwładności tego układu były takie same jak pręta. Zatem zamiast rozpatrywać ruch pręta, rozpatrzmy nasz układ punktów. W początkowej sytuacji każdy z nich porusza się po okręgu o promieniu $\frac{l}{2}\sin\alpha$ z prędkością o wartości $v = \omega(l/2)\sin\alpha$. Taki ruch danego i-tego $(i = 1, 2)$ punktu materialnego jest wymuszany przez: siłę $\vec{F}_{i\|}$działającą wzdłuż łącznika oraz siłę $\vec{F}_{i\perp}$- prostopadłą do łącznika i do wektora prędkości punktu (patrz rys. 1). Suma sił $\vec{F}_{i\|}$ oraz ich momentów jest równa $\vec{0}$, natomiast suma momentów sił $\vec{F}_{i\perp}$ jest niezerowa i jest równa momentowi sił więzów zewnętrznych w stosunku do pręta i wymuszających rozważany ruch. Gdy te więzy przestaną działać (tzn. gdy oś pęknie), również siły $\vec{F}_{i\perp}$staną się równe zeru. Zatem jedynymi siłami, jakie będą działać na nasze punkty materialne, będą siły równoległe do łącznika. Ponieważ łacznik jest nierozciągliwy, otrzymamy ruch po okręgu o promieniu $l/2$. Zauważmy jednocześnie, że w żadnym momencie nie działają siły skierowane wzdłuż wektora prędkości danego punktu materialnego, a zatem jej wartość nie ulegnie zmianie. Ruch po okręgu o promieniu $l/2$ z prędkością $\omega\frac{l}{2}\sin\alpha$ to ruch z prędkością kątową $\omega\frac{l}{2}\sin\alpha$. Zatem pręt będzie się obracał z prędkością kątową $\omega\sin\alpha$ wokół osi obrotu prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek.



rys. 1. Równoważny prętowi układ dwóch punktów materialnych przed usunięciem więzó zewnętrznych.



rys. 2. Równoważny prętowi układ dwóch punktów materialnych po usunięciu więzó zewnętrznych.

Rozwiązanie zadania 7
Powierzchnia pochłaniająca energię Słońca jest w rozważanych przypadkach odpowiednio równa πR^2, R^2, $\pi R^2 + 4R^2$. Powierzchnia promieniująca to odpowiednio $4\pi R^2$, $6R^2$, $4\pi R^2 + 4\pi R^2$. Stosunki powierzchni pochłaniającej do promieniującej wynoszą zatem odpowiednio $1/4$, $1/6$, $(\pi + 4)/(8\pi)$. Zatem najwyższą temperaturę będzie miał "walec", a najniższą sześcian.

Rozwiązanie zadania 8
Oznaczmy następująco: ρ – gęstość mleka przed rozdziałem, h - wysokość słupa mleka przed rozdziałem, ρ_2 – gęstość mleka po rozdziale, ρ_1 – gęstość śmietany, V_1 – objętość śmietany, V_2 – objętość mleka po rozdzieleniu faz, h_1 - wysokość słupa śmietany, h_2 – wysokość słupa mleka po rozdzieleniu faz.
Ponieważ rozdział faz nie zmienia całkowitej objętości i masy, mamy:

$$\rho(V_1 + V_2) = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \ ,$$

stąd

$$(\rho_2 - \rho)\, V_2 = (\rho - \rho_1)\, V_1.$$

Z kształtu naczynia i z tego, że śmietana jest na górze, wynika, że $(V_2/V_1) > (h_2/h_1)$. Zatem uwzględniając powyższe (oraz to, że $\rho_2 - \rho > 0$, $\rho - \rho_1 > 0$) otrzymamy

$$(\rho_2 - \rho)\, h_2 < (\rho - \rho_1)\, h_1.$$

Tę nierówność można przepisać w postaci

$$\rho_1 h_1 g + \rho_2 h_2 g < \rho\,(h_1 + h_2)\, g \ ,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.
Ciśnienie hydrostatyczne przed podziałem jest równe $\rho h g$, a po podziale $\rho_1 h_1 g + \rho_2 h_2 g$. Ponieważ całkowita objętość nie ulega zmianie, mamy $h = h_1 + h_2$. Zatem powyższa nierówność oznacza, że po rozdziale faz ciśnienie na dnie naczynia zmaleje.

Rozwiązanie zadania 9
Praca wykonana przez siłę tarcia jest równa $\mu \Delta x g m$, gdzie Δx jest poziomym przemieszczeniem klocka. Praca wykonana przez grawitację jest równa $\Delta y g m$, gdzie Δy jest pionowym przemieszczeniem klocka. Z zasady zachowania energii $\Delta y g m = \mu \Delta x g m$, czyli $\Delta y / \Delta x = \mu$. Zatem punkt, w którym klocek się zatrzyma, jest przecięciem prostej o kącie nachylenia $-\mu$ z torem, po którym porusza się klocek. W rozpatrywanym przypadku oznacza to, że klocek zatrzyma się w miejscu, w którym kąt nachylenia względem poziomu jest równy $40°$.

Rozwiązanie zadania 10
Ruch drgający struny jest równoważny rzutowi obracajacej się z prędkością kątową $\omega = 2\pi \cdot f$ wokół osi x sinusoidy $y = A \sin(\pi x / L)$, $x \in [0,\ L]$. Z prawa indukcji Faradaya największa wartość siły motorycznej jest równa

$$\mathcal{E} = BS\omega = 4BALf \approx 2 \cdot 10^{-4}\mathrm{V}.$$

Rozwiązanie zadania 11
Energia kinetyczna ruchu postępowego samochodu jest równa $E_{pos.} = Mv^2/2$, gdzie M jest jego całkowitą masą (włącznie z masą kół), a v – prędkością. Energia kinetyczna ruchu obrotowego kół to $E_{obr.} = 4 \cdot (I\omega^2/2)$, gdzie I jest momentem bezwładności jednego koła, a ω – prędkością kątową jego ruchu obrotowego. Skoro samochód porusza się bez poślizgu, to $\omega = v/R$, gdzie R jest promieniem koła. Z drugiej strony $I = \alpha m R^2$, gdzie α jest pewnym bezwymiarowym parametrem, a m – masą koła. Zatem

$$\frac{E_{obr.}}{E_{pos.}} = 4\frac{m}{M}\alpha \ .$$

Dla pełnego krążka $\alpha = 0,5$. W przypadku gdyby masa była tylko na jego brzegu $\alpha = 1$. Wartość α dla danego koła jest zatem zapewne wartością pośrednią między tymi dwiema. Zatem przyjmujac $M = 50m$ otrzymamy

$$\frac{1}{25} < \frac{E_{obr.}}{E_{pos.}} < \frac{2}{25}$$

Rozwiązanie zadania 12
Jeśli różnica faz między wierzchołkami jest równa ϕ przy tej samej amplitudzie U_0, to napięcie między tymi wierzchołkami wynosi

$$U_o \cos(\omega t + \phi) - U_o \cos(\omega t) = -2U_o \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \sin\frac{\phi}{2}.$$

Jest to napięcie sinusoidalne o amplitudzie $2U_0 \sin(\phi/2)$. Moc wydzielająca się na oporniku o oporze R jest równa $[(2U_0 \sin(\phi/2))^2]/(2R) = U_0^2/(2R)(2U_0 \sin(\phi/2))^2$. W przypadku połączenia w gwiazdę napięcie między końcami i - tego opornika wynosi U_i, a zatem wydzielana moc jest równa $U_0^2/(2r)$.
Różnica faz między punktami 2 i 1 oraz 4 i 3 wynosi $\pi/2$, natomiast między punktami 3 i 1 oraz 4 i 2 – π, zatem w przedstawionym rysunku układzie "kwadrat" wydzielana moc jest równa

$$2\frac{U_0^2}{2R}\left(2U_0 \sin\frac{\pi/2}{2}\right)^2 + 2\frac{U_0^2}{2R}\left(2U_0 \sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{U_0^2}{2R}(4+8) = 12\frac{U_0^2}{2R}.$$

Całkowita moc wydzielana w przypadku połączenia w gwiazdę wynosi $4U_0^2/(2r)$. Z żądania równości tych mocy otrzymujemy

$$r = \frac{R}{3} \ .$$

Uwaga: w przeciwieństwie do prądu trójfazowago, kolejność podłączenia przewodów ma tu znaczenie. Po zamianie numerów (i potencjałów) dolnych wierzchołków "kwadratu", różnica faz potencjałów na końcach każdego opornika będzie równa $\pi/2$, a zatem całkowita wydzielana moc wyniesie $8U_0^2/(2R)$. W takim przypadku dostaniemy

$$r = \frac{R}{2}.$$

W przypadku, gdy z treści rozwiązania wynika, że przyjęto taką numerację wierzchołków, powyższe rozwiązanie także należy uznać za poprawne.

Rozwiązanie zadania 13

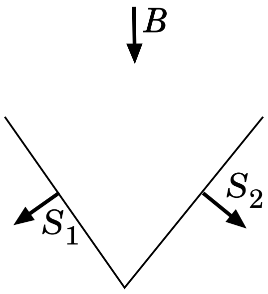
Całkowita siła działająca na układ złożony z prostoliniowych fragmentów przewodników $\vec{l}_i$ (zwrot wektora jest określony przez przepływający prąd) znajdujący się w stałym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ wynosi

$$\vec{F} = \sum_i I\vec{l}_i \times \vec{B} = I\left(\sum_i \vec{l}_i\right) \times \vec{B}.$$

Ponieważ dla obwodu zamkniętego $\sum_i \vec{l}_i = \vec{0}$, oznacza to, że ta siła jest równa $\vec{0}$.
Nasz układ możemy traktować jako układ dwóch połączonych ze sobą jednym bokiem trójkątów równobocznych. Po obwodzie każdego trójkąta płynie prąd I o kierunku tak dobranym, żeby sumaryczny prąd płynący wzdłuż wspólnej krawędzi trójkątów był równy 0. Całkowity moment siły działający na nasz układ jest równy

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{2} I\vec{S}_i \times \vec{B} = I\left(\sum_{i=1}^{2} \vec{S}_i\right) \times \vec{B},$$

gdzie $\vec{S}_i$ jest wektorem prostopadłym do trójkąta i, o długości równej polu trójkąta, a zwrocie określonym zgodnie z reguła śruby prawoskrętnej przez kierunek prądu opływającego dany trójkat (patrz rys. 3). Zauważmy, że rzuty $\sum_{i=1}^{2} \vec{S}_i$ na kierunki prostopadłe do $\vec{B}$, określone przez krawędzie czworościanu, które nie wchodzą w skład ramki, są równe 0. Zatem całkowity moment siły działający na ramkę jest równy $\vec{0}$.



rys. 3. Ramka z prądem — rzut na płaszczyznę prostopadłą do powierzchni rozważanych trójkątów i równoległą do $\vec{B}$.

Rozwiązanie zadania 14

Ta sytuacja jest możliwa, gdy prąd płynący przez układ jest prądem zmiennym. Poszczególnymi elementami układu powinny być (w dowolnej kolejności): kondensator, cewka oraz dowolny element o zawadzie równej Z (np. opornik, kondensator, cewka), przy czym ich odpowiednio pojemność, indukcyjność i Z powinny spełniać warunek $Z = 1/(\omega C) = \omega L$, gdzie ω jest częstotliwością prądu.

Rozwiązanie zadania 15

W nieinercjalnym układzie odniesienia zwiazanym z butelką, efektywne przyspieszenie ziemskie jest równe $\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{a}$, gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem butelki. Ponieważ butelka waha się swobodnie, $\vec{a}$ jest równe prostopadłej do kierunku nici składowej przyspieszenia ziemskiego. To oznacza, że $\vec{g}_{ef}$ jest skierowane wzdłuż nici. Powierzchnia wody w butelce będzie prostopadła do $\vec{g}_{ef}$, co oznacza b) $\beta = \alpha$.