

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA — CZĘŚĆ II

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Zadanie D1

Przyrządź galaretkę mieszając łyżeczkę żelatyny z 1/2 szklanki wrzątku.
Mając do dyspozycji:

- stężałą galaretkę,
- cienką plastikową rurkę zamkniętą z jednej strony,
- duże naczynie z wodą,
- linijkę,
- nóż,
- papier milimetrowy

wyznacz stosunek gęstości galaretki do gęstości wody.

Uwaga: Zamiast plastikowej rurki możesz wykorzystać wypisany wkład do długopisu. Wkład powinien być tak dobrany, aby mógł pływać pionowo w wodzie.

Zadanie D2

Masz do dyspozycji:

- jednakowe gumki-recepturki,
- stoper,
- ciężarek o masie 50 g, statyw lub zaczep umożliwiający zwieszenie ciężarka.

Zakładając, że między siłą F napinającą gumkę i jej długością l zachodzi związek

$$F = k(l - l_0) ,$$

gdzie l_0 — długość swobodna gumki, k — współczynnik sprężystości gumki, wyznacz wartość iloczynu kl_0 dla jednej gumki. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie g wynosi $9,81 \text{ m/s}^2$.

Zadanie D3

Masz do dyspozycji:

- pręt mosiężny lub stalowy o znanej długości z zakresu $0,5 - 1 \text{ m}$ i średnicy $0,5 - 1,5 \text{ cm}$,
- dwa płaskie przetworniki piezoelektryczne używane w urządzeniach elektronicznych do sygnalizacji akustycznej (np. takie jak używane w "grających" kartach urodzinowych),
- klej epoksydowy umożliwiający sztywne zamocowanie przetworników do pręta,
- generator przebiegu sinusoidalnego o częstotliwości z zakresu $1 - 20 \text{ kHz}$, pozwalający ustalić częstotliwość sygnału z dokładnością nie gorszą niż 1 Hz ,
- oscyloskop,
- miękki materiał (n.p. ręcznik, gąbka, styropian), na którym można położyć pręt,

- przewody elektryczne, wtyczki, zaciski itp. elementy umożliwiające zestawienie układu pomiarowego.

Wyznacz prędkość dźwięku w pręcie.

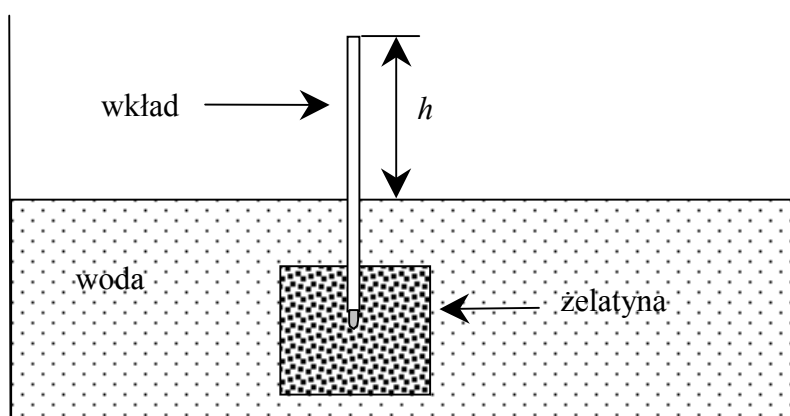
Uwagi:

1. Pręt powinien mieć równe, płaskie końce.
2. Zamiast zwykłego generatora i oscyloskopu możesz użyć komputera wyposażonego w kartę dźwiękową i odpowiednie programy komputerowe. Takie programy można znaleźć w Internecie (np. `fg_lite.exe` oraz `winscope.exe`) lub wykorzystać programy "Generator" oraz "Oscyloskop" dostępne na płycie CD dołączonej do podręcznika J. Blinowski, W. Zielicz, *Fizyka z astronomią. Kształcenie w zakresie rozszerzonym*, tom. I, WSiP, Warszawa 2002 (i 2003, II wydanie). Możesz także skorzystać z programów dostępnych na stronie www.kgof.edu.pl.
3. Przetworniki piezoelektryczne można kupić w sklepach z elementami elektronicznymi lub wymontować je z kart urodzinowych. Na stronie Olimpiady Fizycznej pod adresem <http://www.kgof.edu.pl/> znajdziesz zdjęcia, które pomogą ci zidentyfikować te elementy.

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Łatwo sprawdzić, że galaretka z żelatyny opada na dno naczynia z wodą. Oznacza to, że jej gęstość jest większa niż gęstość wody. Różnica gęstości jest jednak niewielka. Nasuwa to pomysł skonstruowania swego rodzaju areometru, sporządzonego z galaretki i wbitego w nią wkładu do długopisu lub plastikowej rurki (rys 1).



rys. 1

Wysokość h części wkładu, jaka wystaje ponad powierzchnię wody, wynika z równowagi siły ciężkości i siły wyporu działającej na „areometr”. W przypadku, gdy mamy do czynienia z wkładem (rurką) o średnicy d warunek równowagi można zapisać w postaci:

$$m + \rho_g V_g = \rho_w (h_0 - h) \frac{\pi d^2}{4} + \rho_w V_g, \quad (1)$$

gdzie m – masa wkładu, ρ_g – gęstość galaretki, ρ_w – gęstość wody, V_g – objętość galaretki, d – średnica wkładu, h_0 – pewna stała, która w przypadku jednorodnej (walcowej) rurki odpowiadałaby jej długości.

Równanie (1) wygodnie jest przekształcić do postaci:

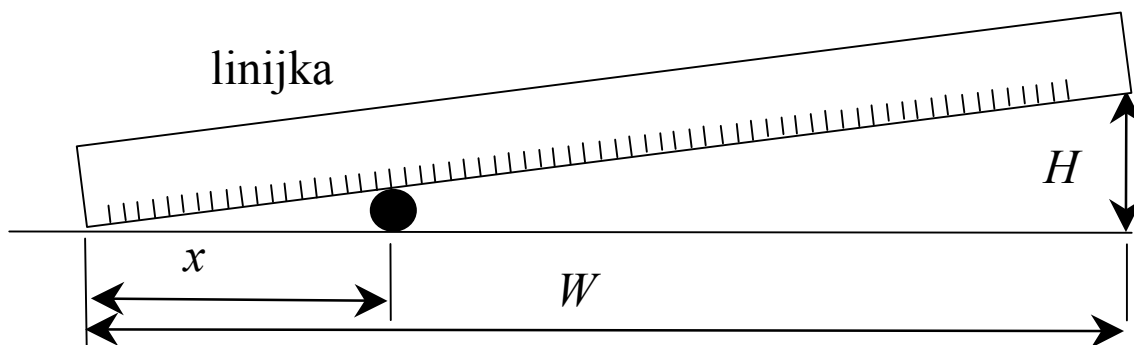
$$h = -\alpha V_g + C, \quad (2)$$

gdzie $\alpha = \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_w} - 1 \right)$, C – pewna stała.

Zatem, mierząc wysokość h wkładu (rurki) wystającą ponad powierzchnię wody, dla różnych objętości galaretki, można znaleźć współczynnik α , który jest bezpośrednio związany z szukanym stosunkiem gęstości:

$$\frac{\rho_g}{\rho_w} = 1 + \frac{1}{4} \alpha \pi d^2. \quad (3)$$

Warto zwrócić uwagę, że taka metoda nie wymaga znajomości innych parametrów układu, takich jak masa wkładu m czy też wysokość h_0 , które wchodzą do stałej C w równaniu (2). Średnicę wkładu można wyznaczyć np. w układzie przedstawionym schematycznie na rys. 2.



rys. 2

Z prostych zależności geometrycznych między odległościami x , W , H i średnicą wkładu d dostajemy związek:

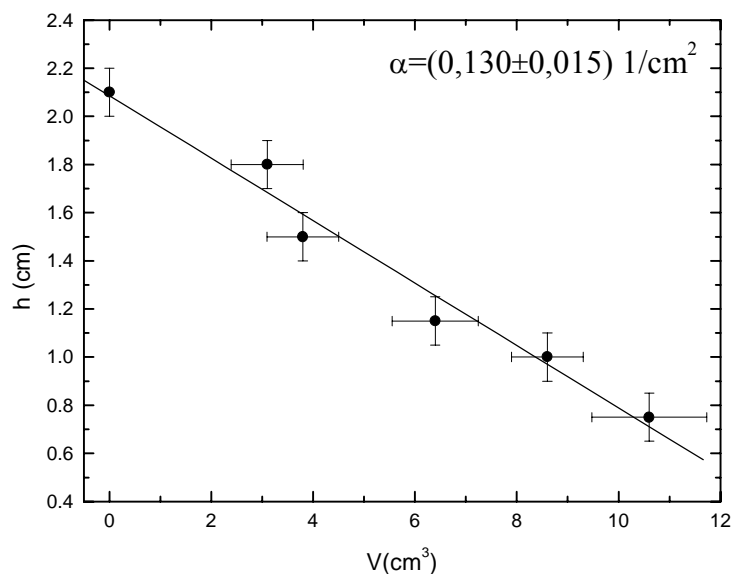
$$d = \frac{x}{W} H. \quad (4)$$

Ze względu na to, że linijka jest wykorzystywana do konstrukcji układu pomiarowego, odległości x , W , H należy zmierzyć używając papieru milimetrowego.

Część doświadczalna

Zgodnie z sugestią zawartą w uwadze dodanej do treści zadania, wkład powinien być tak dobrany, aby mógł pływać pionowo w wodzie. Zatem pomiary należy zacząć od sprawdzenia czy wybrany wkład spełnia ten warunek. Jeśli tak, to należy zmierzyć jaka jego część pozostaje ponad powierzchnią wody. Następnie, za pomocą noża, należy wyciąć z galaretki prostopadłościanny i zmierzyć ich wymiary. Po wbiciu wkładu w kostkę galaretki należy umieścić ją w wodzie, w sposób pokazany na rys. 1. Objętość galaretki powinna być tak dobrana, żeby układ nie zatonął. Pomiary należy wykonać dla możliwie szerokiego zakresu objętości kawałków galaretki. Przykładowe wyniki zostały zebrane w tabeli. Na ich podstawie sporządzono wykres przedstawiony na rys. 3. Przyjęto, że niepewność wyznaczenia h oraz niepewność określenia wymiarów prostopadłościennych kostek galaretki wynosi 1 mm.

h , mm	wymiary kostki galaretki, mm	objętość galaretki, cm ³
21	-	0
18	13×12×20	3,1
15	14×15×18	3,8
11,5	21×18×17	6,4
10	20×18×24	8,6
7,5	20×22×24	10,6



rys. 3

Z dopasowania prostej do wyników doświadczalnych uzyskano współczynnik $\alpha = (0,130 \pm 0,015) 1/\text{cm}^2$.

Pomiary średnicy wkładu wykonano dla różnych odległości od jego końca, obracając go wokół osi. Okazało się, że ew. niejednorodności kształtu oraz średnicy wkładu wybranego do doświadczenia są zbyt małe, aby można było je wykryć przy użyciu zastosowanej metody pomiarowej. O jej niepewności decyduje bowiem niepewność wyznaczenia odpowiednich odległości za pomocą papieru milimetrowego. Na podstawie kilku pomiarów wykonanych w układzie przedstawionym na rys. 2, otrzymano następujące wartości: $H=(13 \pm 1)$ mm, $x=(70 \pm 2)$ mm, $W=(280 \pm 2)$ mm). Po ich podstawieniu do wzoru (4) uzyskano średnicę wkładu $d=(3,3 \pm 0,3)$ mm.

Znając współczynnik α oraz średnicę wkładu, ze wzoru (3) otrzymano wartość stosunku gęstości galaretki do gęstości wody $\frac{\rho_g}{\rho_w} = (1,011 \pm 0,003) \text{ g/cm}^3$.

Największy udział w niepewności pomiarowej wyniku końcowego ma dokładność wyznaczenia średnicy wkładu. Dzieje się tak dlatego, że w wzorze (3) średnica występuje w kwadracie. Duże znaczenie dla poprawności uzyskanego wyniku ma też staranność wycięcia kostek z galaretki i wykorzystanie metody najmniejszych kwadratów do wyznaczenia wartości współczynnika α .

Proponowana punktacja:

- | | |
|--|-----------|
| 1) Pomysł doświadczenia umożliwiającego wyznaczenie gęstości galaretki | do 4 pkt. |
| 2) Wyprowadzenie poprawnych wzorów | do 4 pkt. |
| 3) Pomysł na sposób pomiaru średnicy | do 1 pkt. |
| 4) Pomiary umożliwiające wyznaczenie gęstości galaretki | do 5 pkt. |
| 5) Pomiar średnicy wkładu i określenie jej niepewności pomiarowej | do 2 pkt. |
| 6) Wykonanie wykresu i dopasowanie prostej | do 2 pkt. |
| 7) Uzyskanie poprawnego wyniku końcowego i oszacowanie niepewności pomiarowej gęstości | do 2 pkt. |

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Ponieważ w zestawie doświadczalnym brak jest linijki, to nie jest możliwy ani bezpośredni pomiar całkowitej długości gumki, ani też zmiany jej wydłużenia spowodowanej zawieszeniem odważnika. Nasuwająca się metoda wyznaczenia współczynnika sprężystości k polega na pomiarze okresu drgań sprężystych T odważnika o masie m zawieszonoego na gumce. Wiedząc, że okres ten wynosi

$$T_k = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1)$$

łatwo znajdziemy współczynnik sprężystości gumki

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_k^2} \quad (2)$$

Długość swobodną gumki l_0 można wyznaczyć badając wahania odważnika zawieszonoego na gumce. Należy jednak dobrać warunki eksperymentu tak, aby długość gumki nie zmieniała się znacząco. W praktyce oznacza to badanie drgań o możliwie małej amplitudzie. Jeśli takie warunki zostaną spełnione, to okres wahań ciężarka zawieszonoego na gumce można opisać wzorem na okres wahadła matematycznego:

$$T_g = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3)$$

gdzie l – długość gumki napiętej ciężarkiem.

Biorąc pod uwagę, że długość gumki napiętej odważnikiem o masie m wynosi $l = l_0 + \frac{mg}{k}$, po skorzystaniu z wyrażenia (2), związek (3) można zapisać w postaci:

$$l_0 = \frac{g}{4\pi^2} (T_g^2 - T_k^2). \quad (4)$$

Łącząc wyrażenia (2) i (4) możemy wyrazić szukany iloczyn kl_0 przez, mierzone w eksperymencie, okresy drgań i masę odważnika:

$$kl_0 = mg \left(\frac{T_g^2}{T_k^2} - 1 \right). \quad (5)$$

Część doświadczalna

Zawieszając ciężarek 50 g na pojedynczej gumce recepturce łatwo stwierdzić, że częstotliwość drgań własnych w obu omawianych przypadkach jest duża. Ponadto, ze względu na silne tłumienie, drgania sprężyste gumki bardzo szybko gasną i trudno jest wyznaczyć ich okres. Dlatego, lepiej jest wykonać eksperyment wiążąc ze sobą kilka gumek. Wtedy oczekiwane okresy drgań powinny być dłuższe. Jeśli połączymy ze sobą „szeregowo” n jednakowych gumek, to długość swobodna L_0 otrzymanej w ten sposób „supergumki” będzie n -krotnie większa, natomiast jej efektywny współczynnik sprężystości K , będzie n -krotnie mniejszy. Wynika z tego, że iloczyn

$$KL_0 = kl_0, \quad (6)$$

nie zależy od długości łańcucha gumek.

Jak się okazało, po zawieszeniu odważnika 50 g na pięciu (połączonych szeregowo) gumkach udało się zaobserwować kilka drgań sprężystych. W celu uzyskania lepszej dokładności pomiar powtórzono kilkakrotnie i na tej podstawie wyznaczono $T_k = (0,94 \pm 0,03)$

s. Pomiar drgań wahadła wykonanego z pięciu gumek i ciężarka, pozwoliły wyznaczyć okres $T_g=(2,06\pm 0,01)$ s. Po podstawieniu danych liczbowych do wzoru (5) otrzymano wartość iloczynu $kl_0=(1,9\pm 0,2)$ N.

Warto zwrócić uwagę, że wartość iloczynu kl_0 jest proporcjonalna do modułu Younga E i powierzchni przekroju poprzecznego gumki S , tzn. $kl_0=SE$. Biorąc pod uwagę, że badane gumki miały wymiary poprzeczne bliskie 1mm, uzyskać można wartość $E=2\text{MPa}$, która mieści się w przedziale wartości modułu Younga podawanego dla gumy.

Proponowana punktacja

Część teoretyczna

- | | |
|---|-----------|
| 1) Pomysł pomiaru okresu drgań sprężystych ciężarka na gumce | do 2 pkt. |
| 2) Pomysł pomiaru okresu drgań wahadła sporządzonego z gumki i ciężarka | do 2 pkt. |
| 3) Wyprowadzenie wzorów (2), (4), (5) | do 3 pkt. |
| 4) Pomysł badania „supergumki”, wyprowadzenie związku (6) | do 3 pkt. |

Część doświadczalna

- | | |
|---|-----------|
| 5) Pomiar okresu T_k i oszacowanie jego niepewności pomiarowej | do 4 pkt. |
| 6) Pomiar okresu T_g i oszacowanie jego niepewności pomiarowej | do 4 pkt. |
| 7) Uzyskanie wartości liczbowej kl_0 i oszacowanie jej niepewności pomiarowej | do 2 pkt. |

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Prędkość c podłużnych fal akustycznych w mosiądzu (stali) można wyznaczyć mierząc częstotliwość fali stojącej w niezamocowanym pręcie. W takim przypadku na końcach pręta tworzą się strzałki i dla kolejnych fal stojących spełniony jest związek:

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad (1)$$

gdzie l – długość pręta, λ_n – długość fali, n – liczba naturalna.

Biorąc pod uwagę, że pomiędzy długością fali λ a jej częstotliwością f zachodzi związek:

$$\lambda_n = \frac{c}{f_n}, \quad (2)$$

równanie (1) można przekształcić do postaci:

$$l = n \frac{c}{2f_n}, \quad (3)$$

którą można zapisać w formie:

$$f_n = An, \quad (4)$$

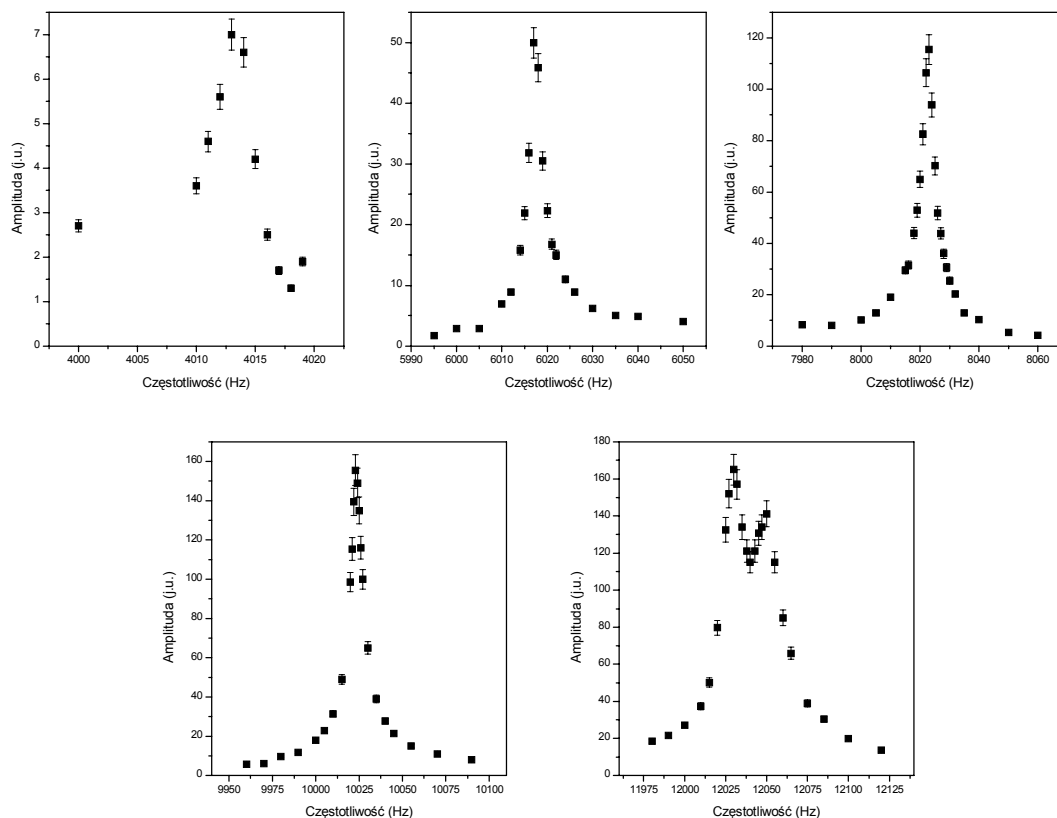
gdzie $A = \frac{c}{2l}$.

Współczynnik A można wyznaczyć mierząc częstotliwości odpowiadające kolejnym falom stojącym w pręcie i sporządzając wykres. Do wzbudzenia fal można wykorzystać przetwornik piezoelektryczny (nadajnik) przyklejony, metalową stroną, do końca pręta. Pomiar amplitudy wytworzonych drgań podłużnych można wykonać wykorzystując przetwornik (odbiornik), przyklejony do drugiego końca pręta.

Część doświadczalna

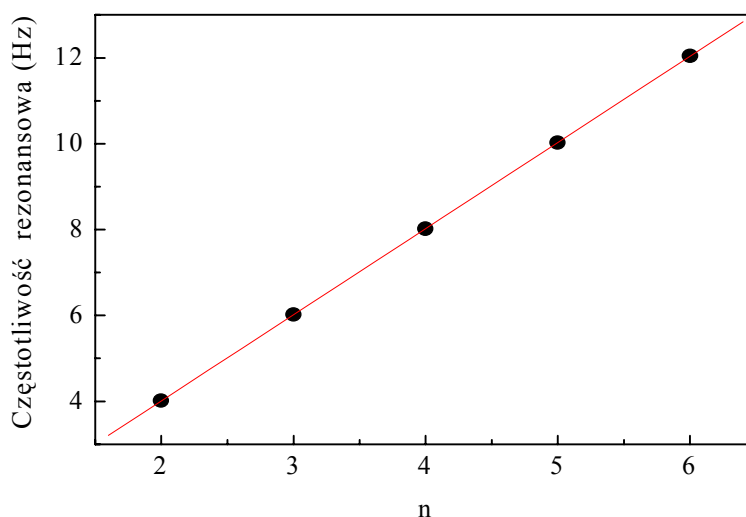
W modelowym układzie przetworniki przyklejono do pręta za pomocą kleju epoksydowego. Żeby przetworniki miały dobry kontakt mechaniczny z prętem, przed ich przyklejeniem należy się upewnić, że końce pręta są płaskie. Po wyschnięciu kleju, jeden z przetworników podłączono do wyjścia karty dźwiękowej, drugi zaś do wejścia mikrofonowego karty. Pręt położono na miękkich podkładkach, by kontakt ze sztywnymi przedmiotami nie zaburzał wytworzonej w nim fali stojącej. Następnie za pomocą programu „Generator” ustalano częstotliwość i amplitudę sygnału sinusoidalnego podawanego na jeden z przetworników. Za pomocą programu „Oscyloskop” odczytywano amplitudę sygnału, generowanego w przetworniku umieszczonym na drugim końcu pręta. Ze względu na silną zależność sprawności przetworników od częstotliwości, konieczne było dostosowanie amplitudy generowanego sygnału oraz czułości oscyloskopu do aktualnej częstotliwości. Dla częstotliwości poniżej 4000 Hz amplituda napięcia wyjściowego generatora musiała być duża, żeby rejestracja sygnału na oscyloskopie była w ogóle możliwa. Z kolei, dla wyższych częstotliwości, gdy sprawność układu jest znacznie większa, trzeba było uważać, żeby nie przesterować wejścia mikrofonowego karty dźwiękowej.

W trakcie doświadczenia zmieniano częstotliwość sygnału podawanego z generatora do nadajnika i obserwowano zmianę amplitudy sygnału w odbiorniku. Zależność amplitudy tego sygnału od częstotliwości przedstawiono na rys. 1. Widać, że szerokości połówkowe otrzymanych krzywych rezonansowych są bardzo małe. Pozwoliło to na wyznaczenie częstotliwości rezonansowych z dokładnością bliską 1 Hz. W doświadczeniu wykonanym dla pręta mosiężnego o długości $l = (0,880 \pm 0,001)$ m i średnicy 13 mm wyniosły one: 4013 Hz, 6017 Hz, 8023 Hz, 10023 Hz, 12040 Hz.



Rys. 1. Zależność amplitudy sygnału wytwarzanego przez odbiornik od częstotliwości napięcia zasilającego nadajnik piezoelektryczny.

Podwójna struktura widoczna dla krzywej rezonansowej w okolicy 12040 Hz, jest prawdopodobnie wywołana wzbudzeniem dodatkowych modów drgań w pręcie. Uzyskane wartości częstotliwości rezonansowych f_n naniesiono na wykres przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Zależność częstotliwości fali stojącej w pręcie od wielokrotności połówek długości fal mieszczących się w pręcie.

Kolejne punkty eksperymentalne bardzo dobrze układają się na prostej. Z dopasowania uzyskano współczynnik kierunkowy $A = (2006 \pm 2)$ Hz. Biorąc pod uwagę jego wartość i długość pręta $l = (0,880 \pm 0,001)$ m uzyskujemy prędkość podłużnych fal akustycznych w pręcie $c = 2 A l = (3531 \pm 4)$ m/s.

Warto zauważyć, że kolejne częstotliwości f_n powinny być wielokrotnościami częstotliwości podstawowej $f_1=c/2l$. Tymczasem w otrzymanych wynikach doświadczalnych różnica kolejnych częstotliwości jest o połowę mniejsza niż wartość pierwszej zmierzonej częstotliwości rezonansowej. Oznacza to, że najniższa wyznaczona częstotliwość rezonansowa nie odpowiada częstotliwości podstawowej drgań ($n=1$), ale jest jej drugą harmoniczną ($n = 2$). Sytuacja ta wynika z małej sprawności przetworników piezoelektrycznych dla częstotliwości poniżej 4kHz. Powoduje to, że fala stojąca o najniższej częstotliwości nie jest efektywnie wzbudzana.

Dzięki dużej dokładności z jaką można wyznaczyć częstotliwości kolejnych fal stojących w pręcie, o niepewności wyznaczenia prędkości dźwięku decyduje głównie niepewność długości pręta Δl . W efekcie względna niepewność $\Delta c/c$ jest rzędu 10^{-3} i jest lepsza niż dla większości pomiarów, jakie można wykonać w warunkach domowych.

Proponowana punktacja

- 1) Pomysł układu eksperymentalnego umożliwiającego wzbudzenie i detekcję fal stojących w pręcie do 3pkt.
- 2) Wyprowadzenie wzorów pozwalających wyznaczyć prędkość dźwięku w pręcie do 4pkt.
- 3) Zestawienie układu doświadczalnego umożliwiającego wyznaczenie prędkości dźwięku w pręcie. do 3 pkt.
- 1) Wykonanie pomiarów pozwalających na dokładne wyznaczenie kilku częstotliwości rezonansowych do 6 pkt.
- 2) Wykonanie wykresu i dopasowanie prostej do 2 pkt.
- 3) Uzyskanie wartości liczbowej prędkości dźwięku w pręcie i jej niepewności do 2pkt.