

Zadanie T1

W podróży dookoła świata balonem są wykorzystywane silne wiatry wiejące w okolicach zwrotnika w kierunku równoleżnikowym na wysokości ok. 10 km. Wiatr taki tworzą masy powietrza, które unoszą się pionowo nad równikiem, następnie przemieszczają się na wysokości 10 km w okolice zwrotnika, a w końcu tam opadają. Zakładając, że na te masy powietrza nie działają (w układzie inercyjnym) żadne siły w kierunkach równoleżnikowych, obliczyć ich równoleżnikową prędkość nad zwrotnikiem względem powierzchni Ziemi.

Rozwiązanie T1

Moment pędu masy m powietrza nad równikiem jest równy

$$J = m\Omega R^2, \quad (1)$$

gdzie $\Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{1}{s}$ jest prędkością kątową ruchu obrotowego Ziemi, a R odległością powietrza od środka Ziemi, czyli z dobrą dokładnością promieniem Ziemi. Ponieważ nie działają żadne siły w kierunkach równoleżnikowych, moment pędu (względem osi obrotu Ziemi) jest zachowany i gdy to powietrze przemieści się na szerokość geograficzną $\theta = 23^\circ 27'$ (zwrotnik), będziemy mieli

$$J = mv_i R \cos \theta, \quad (2)$$

gdzie v_i jest równoleżnikową prędkością powietrza nad zwrotnikiem w układzie inercyjnym, a $R \cos \theta$ – odległością tego powietrza od osi obrotu Ziemi. Równoleżnikowa prędkość tego powietrza względem powierzchni Ziemi będzie zatem równa

$$v = v_i - \Omega R \cos \theta = \frac{\Omega R}{\cos \theta} - \Omega R \cos \theta = \Omega R \cdot \left(\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) \approx 250 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3)$$

Punktacja

Zauważenie, że w rozwiązaniu należy wykorzystać zachowanie momentu pędu – 3pkt.

Wzór (1) na moment pędu powietrza nad równikiem – 2pkt.

Wzór (2) na moment pędu powietrza nad zwrotnikiem – 2pkt.

Wynik końcowy (wzór (3)) – 3pkt.

Zadanie T2

Według teorii Wielkiej Unifikacji istnieje pewne, bardzo niewielkie, prawdopodobieństwo rozpadu protonu na mezon π^0 i pozyton. W jednym z eksperymentów sprawdzających tę teorię obserwowano 3300 ton wody przy użyciu nadzwyczaj czułej aparatury, będącej w stanie wykryć nawet pojedynczy rozpad protonu. W ciągu roku nie wykryto żadnego przypadku rozpadu. Jakie wynika stąd ograniczenie na czas połowicznego rozpadu protonu? Dokładniej, przy jakiej wartości czasu połowicznego rozpadu w ciągu roku nastąpi z prawdopodobieństwem 95% co najmniej jeden rozpad?

Rozwiązanie T2

Podana ilość wody to $3,3 \cdot 10^6 \frac{1}{0,018} \approx 1,8 \cdot 10^8$ moli H_2O , czyli

$$1,8 \cdot 10^8 \cdot 6,2 \cdot 10^{23} \cdot 10 \approx 1,1 \cdot 10^{33} \quad (1)$$

protonów (skorzystaliśmy z tego, że w H_2O jest 10 protonów).

Zgodnie z prawem rozpadu promieniotwórczego, prawdopodobieństwo zdarzenia, że jeden wybrany proton nie rozpadnie się w ciągu czasu $t_1 = 1$ rok jest równe

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T_{1/2}}}, \quad (2)$$

gdzie $T_{1/2}$ jest czasem połowicznego rozpadu. Ponieważ protony rozpadają się niezależnie od siebie, prawdopodobieństwo zdarzenia, że w czasie t_1 nie rozpadnie się żaden spośród N protonów wynosi $(p_1)^N$. Z drugiej strony, zgodnie z treścią zadania, to prawdopodobieństwo jest równe $1 - 0,95 = 0,05$. Zatem

$$(p_1)^N = 0,05, \quad (3)$$

czyli

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{N \frac{t_1}{T_{1/2}}} = 0,05.$$

Otrzymujemy stąd

$$N \frac{t}{T_{1/2}} = \log_{\frac{1}{2}} 0,05.$$

Ostatecznie

$$T_{1/2} = \frac{N}{\log_{\frac{1}{2}} 0,05} t_1. \quad (4)$$

Podstawiając $N = 1,1 \cdot 10^{33}$, $t_1 = 1$ rok, $\log_{\frac{1}{2}} 0,05 = \frac{\log 0,05}{\log \frac{1}{2}} \approx 4,3$ otrzymamy, że szukany czas połowicznego rozpadu jest równy

$$T_{1/2} \approx 2,6 \cdot 10^{32} \text{lat}. \quad (5)$$

Punktacja

Obliczenie ilości protonów w danej próbce (wzór (1)) – 2pkt.

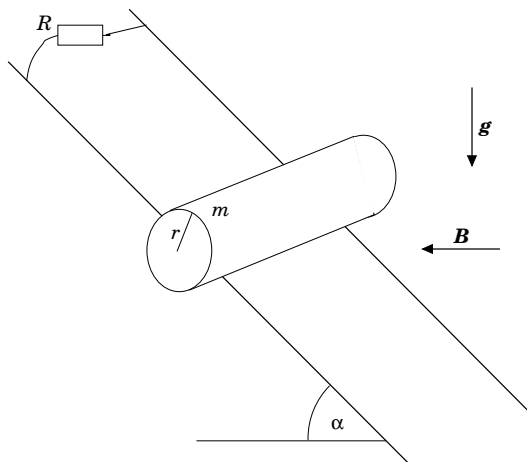
Wzór na prawdopodobieństwo nierozpadnięcia się protonu po roku (wzór (2) lub równoważny) – 1pkt

Powiązanie prawdopodobieństwa nierozpadnięcia się jednego protonu z prawdopodobieństwem niewystąpienia rozpadu protonu w próbce (wzór (3) lub równoważny) – 3pkt.

Wyznaczenie $T_{1/2}$ (wzór (5)) – 4pkt.

Zadanie T3

Jednorodny, metalowy walec o masie m i promieniu r położono poziomo na dwóch równoległych, odległych od siebie o d prostoliniowych przewodach, które tworzą równię pochyłą nachyloną do poziomu pod kątem α . Końce przewodów są połączone ze sobą opornikiem o oporze R . Cały układ znajduje się w skierowanym poziomo, prostopadle do osi walca, stałym i jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (patrz rysunek 4).



rys. 4

- Jaka jest prędkość maksymalna v_{\max} , jaką w rozważanej sytuacji może osiągnąć staczający się walec? Przedyskutuj wynik w zależności od wartości kąta α .
- Wyznacz zależność przyspieszenia a oraz przyspieszenia kąowego ϵ od jego prędkości v . Podaj wartości a i ϵ dla $v = 0$ oraz $v = \frac{1}{2}v_{\max}$.
- Opisz jakościowo zachowanie się walca w przypadku, gdy nadano mu prędkość początkową (wzdłuż przewodów) większą od v_{\max} .

Walec toczy się bez poślizgu. Opory toczenia, opór powietrza oraz opory elektryczne drutów i walca można zaniedbać. Przyjmij, że poza bliską okolicą miejsc styku walca z przewodami, prąd płynący przez walec jest równomiernie rozłożony na całej powierzchni jego przekroju poprzecznego.

Rozwiązanie T3

a), b) Gdy walec stacza się z prędkością v , to indukowana siła elektromotoryczna jest równa

$$U = vdB \sin \alpha, \quad (1)$$

która powoduje, że płynie przez niego prąd

$$I = \frac{U}{R} = \frac{vdB \sin \alpha}{R}. \quad (2)$$

Ten prąd wytwarza siłę elektrodynamiczną równą

$$F_B = IdB, \quad (3)$$

i skierowaną pionowo w górę (ta siła musi się przeciwstawiać zmianie strumienia indukcji magnetycznej, dlatego w przypadku staczającego się walca jest skierowana w górę, a nie w dół).

Rozważmy teraz moment siły elektrodynamicznej względem chwilowej osi obrotu walca. Zgodnie z treścią zadania prąd I jest rozłożony równomiernie na całej powierzchni przekroju poprzecznego walca (jest to naturalne założenie gdy $d \gg r$), zatem również siła

F_B jest sumą równomiernie rozłożonych sił działających na poszczególne "linie prądu". Suma momentów tych sił (względem dowolnego punktu) jest równa momentowi siły F_B (względem tego samego punktu) przyłożonej do środka walca. Jest to analogiczna sytuacja jak przypadku siły ciężkości działającej na ciało znajdujące się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Uwzględniając siłę grawitacyjną, całkowity moment siły względem chwilowej osi obrotu walca jest równy

$$M = (mg - F_B) r \sin \alpha.$$

Przyspieszenie katowe walca zatem wynosi

$$\epsilon = \frac{(mg - F_B) r \sin \alpha}{I + mr^2} = \frac{mg - \frac{1}{R}vd^2B^2 \sin \alpha}{\frac{3}{2}mr} \sin \alpha, \quad (4)$$

gdzie $I = \frac{1}{2}mr^2$ jest momentem bezwładności walca względem jego osi. Stąd przyspieszenie walca jest równe

$$a = \epsilon r = \frac{mg - \frac{1}{R}vd^2B^2 \sin \alpha}{\frac{3}{2}m} \sin \alpha = \frac{2}{3}g\left(1 - \frac{v}{v_m}\right) \sin \alpha, \quad (5)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$v_m = \frac{mgR}{d^2B^2 \sin \alpha}. \quad (6)$$

Ponieważ $a > 0$ dla $v < v_m$ oraz $a = 0$ dla $v = v_m$, wzór (5) oznacza, że powyższe v_m jest maksymalną prędkością, jaką walec może osiągnąć w rozważanej sytuacji (tzn. gdy jego prędkość początkowa jest równa 0). Oznacza to, że $v_m = v_{\max}$, czyli szukana w punkcie a) prędkość maksymalna jest równa

$$v_{\max} = \frac{mgR}{d^2B^2 \sin \alpha}. \quad (7)$$

Wzór na a w nowych oznaczeniach przyjmie postać

$$a = \frac{2}{3}g\left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right) \sin \alpha. \quad (8)$$

Dla $v = 0$ otrzymujemy

$$a = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad (9)$$

dla $v = \frac{v_{\max}}{2}$ otrzymujemy

$$a = \frac{1}{3}g \sin \alpha. \quad (10)$$

Dyskusja zależności v_{\max} od α :

Zauważmy, że zgodne z treścią zadania wartości α odpowiadają $0 \leq \alpha < \pi/2$.

Ze wzoru (7) wynika, że v_{\max} jest najmniejsze dla $\alpha = \pi/2$ i rośnie gdy α maleje. Gdy α dąży do 0, v_{\max} dąży do nieskończoności. Zauważmy jednak, że im mniejsze α , tym mniejsze jest przyspieszenie, a więc wzrasta czas osiągnięcia prędkości zbliżonej do v_{\max} . W przypadku dokładnego $\alpha = 0$ wcale nie będziemy mieli nieskończonej prędkości maksymalnej, gdyż wtedy przyspieszenie jest równe 0 i walec pozostanie w spoczynku (czyli można przyjąć, że prawdziwe $v_{\max} = 0$). Warto zauważyć, że tak naprawdę przypadki z różnymi α odpowiadają tej samej granicznej wartości pionowej składowej prędkości walca równej $\frac{mgR}{d^2B^2}$!

c) Formalnie wzór (8) obowiązuje również dla $v > v_{\max}$; wynika z niego, że walec będzie zmniejszał swoją prędkość, aż do osiągnięcia prędkości v_{\max} . Jednak w rzeczywistości w tej sytuacji suma siły F_B i siły grawitacyjnej jest skierowana do góry, co oznacza, że walec oderwie się od przewodów. To jednak oznacza przerwanie obwodu i wyłączenie działania siły F_B , a więc niemożność oderwania się walca od przewodów! W praktyce sytuacja będzie taka, że ze względu na zmniejszenie siły nacisku opór w obwodzie wzrośnie na tyle, że F_B będzie jednak mniejsze od mg . W idealnym przypadku $F_B = mg$, co oznacza, że walec poruszałby się ze stałą prędkością. Dokładnie co by się w rzeczywistości działo w takiej sytuacji nie można jednak określić na podstawie treści zadania i potrzebne są dodatkowe założenia.

Punktacja

Wyznaczenie siły elektromotorycznej (wzór (1)) – 1pkt.

Wyznaczenie prądu I (wzór (2)) – 1pkt.

Wzór na siłę elektrodynamiczną (wzór (3)) – 1pkt.

Wyznaczenie przyspieszeń a i ϵ (wzory (5) i (4)) – 2pkt.

Wyznaczenie v_{\max} (wzór (7)) – 1pkt.

Podanie szczególnych wartości a dla $v = 0$ i $v = v_{\max}/2$ (wzory (9) i (10)) – 1pkt.

Dyskusja zależności v_{\max} od α , w szczególności wyjaśnienie przypadku $\alpha = 0$ – 1pkt.

Zauważenie, że przyjęcie $v > v_{\max}$ przy założeniu, że obwód pozostaje zamknięty i opór się nie zmienia, powoduje oderwanie walca i prowadzi do sprzeczności – 2pkt.