Zadanie 1

Pocisk w kształcie stożka o polu podstawy S i kącie rozwarcia 2α porusza się z prędkością v wzdłuż swojej osi (w stronę wierzchołka) w bardzo rozrzedzonym jednoatomowym gazie. Temperatura gazu jest na tyle niska, a prędkość v na tyle duża, że można przyjąć, że atomy gazu są nieruchome. Gęstość gazu jest równa ρ.

Zakładając, że atomy gazu zderzają się z powierzchnią pocisku doskonale sprężyście i nie zderzają się ze sobą, obliczyć siłę oporu, jaka działa na pocisk. Powierzchnia pocisku jest idealnie gładka. Podaj wartość liczbową dla $\rho = 10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3}$, $v = 7\,\mathrm{km/s}$, $\alpha = 45°$, $S = 0,01\,\mathrm{m^2}$.

Rozwiązanie zadania 1.

Zagadnienie będziemy rozpatrywali w układzie, w którym stożek jest nieruchomy.

a) Ponieważ zderzenie jest doskonale sprężyste, a powierzchnia stożka nieruchoma, atom gazu po zderzeniu będzie miał prędkość v skierowaną pod kątem 2α w stosunku do początkowej prędkości. Zatem zmiana równoległej do osi stożka składowej pędu atomu o masie m jest równa

$$\Delta p = mv\left(\cos 2\alpha - 1\right). \tag{1}$$

W czasie Δt ze stożkiem zderza się ΔN atomów gazu, przy czym

$$\Delta N = \frac{\rho}{m} v S \Delta t. \tag{2}$$

Zatem całkowita siła oporu działająca na stożek jest równa

$$F_{\mathrm{oporu}} = -\frac{\Delta N \Delta p}{\Delta t} = \left(1 - \cos 2\alpha\right)\rho v^2 S = 2\sin^2\alpha\ \rho v^2 S. \tag{3}$$

Jej wartość liczbowa dla podanych danych wynosi

$$F_{\mathrm{oporu}} \approx 490\,\mathrm{N}. \tag{4}$$

Zadanie 2

Wąska wiązka fullerenów – cząsteczek węgla C_{60} w kształcie piłki futbolowej – pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej sieci $d = 100\,\mathrm{nm}$ (siatką dyfrakcyjną jest płytka z azotku krzemu z wyciętymi równoległymi wąskimi szczelinami). Za siatką znajdują się detektory zliczające cząsteczki docierające do poszczególnych punktów płaszczyzny ("ekranu") znajdującej się w dużej odległości od siatki i równoległej do niej. Wskazania detektorów służą do wyznaczenia powstałego obrazu interferencyjnego.

a) Przyjmując, że rozkład prędkości cząsteczek (v) w wiązce jest rozkładem jednorodnym w zakresie $v \in [v_0 - \Delta v, v_0 + \Delta v]$, wyznacz kąt ugięcia wiązki α_n odpowiadający położeniu środka prążka interferencyjnego n-tego rzędu oraz kąt $\Delta\alpha_n$ odpowiadający szerokości tego prążka (prążek jest obszarem, do którego dolatują cząsteczki). Podaj wartości liczbowe dla $n = 1$, $v_0 = 117\,\mathrm{m/s}$, $\Delta v = 0,17 v_0$. Rozważ tylko te prążki, dla których $\sin\alpha_n \approx \alpha_n$.

b) Jaki jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości cząsteczek w wiązce (przy ustalonym v_0), aby prążek n-tego rzędu był dobrze rozróżnialny, tzn. aby po obu jego stronach były miejsca, do których nie docierają cząsteczki?

Zakładamy, że każda z cząsteczek ma dokładnie określony pęd.

Masa atomu węgla jest równa $2,0 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$.

Rozwiązanie zadania 2

Prążki interferencyjne pojawiają się, gdy różnica faz fal (de Broglie'a) wychodzących z sąsiednich szczelin siatki jest równa wielokrotności 2π, czyli gdy kąt ugięcia wiązki α spełnia warunek

$$d \sin\alpha = n\lambda, \tag{1}$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, a λ – długością fali de Broglie'a cząsteczki o masie m i prędkości v

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{2}$$

(h jest stałą Plancka).

Dla wiązki cząsteczek o jednakowych prędkościach (i idealnej siatki dyfrakcyjnej, o dużej liczbie szczelin) każdy prążek jest nieskończenie cienki. Jednak w naszym przypadku, ze względu na różne prędkości cząsteczek wiązce, prążek n-tego rzędu będziemy obserwować dla kątów ugięcia α od $\alpha = \alpha_n^+$ do $\alpha = \alpha_n^-$, gdzie

$$d \sin\alpha_n^+ = n\frac{h}{m(v_0 + \Delta v)} \approx d\alpha_n^+$$

$$d \sin\alpha_n^- = n\frac{h}{m(v_0 - \Delta v)} \approx d\alpha_n^-$$

Zatem kąt odpowiadający położeniu środka prążka n-tego rzędu jest dany wzorem

$$\alpha_n = \frac{1}{2} n \frac{h}{md}\left(\frac{1}{v_0 - \Delta v} + \frac{1}{v_0 + \Delta v}\right) = n\frac{h}{md}\frac{v_0}{v_0^2 - (\Delta v)^2}, \tag{3}$$

a kąt odpowiadający szerokości tego prążka wzorem

$$\Delta\alpha_n = n\frac{h}{md}\left(\frac{1}{v_0 - \Delta v} - \frac{1}{v_0 + \Delta v}\right) = n\frac{h}{md}\frac{2\Delta v}{v_0^2 - (\Delta v)^2}. \tag{4}$$

Dla podanych wartości liczbowych otrzymamy (w radianach)

$$\alpha_1 \approx 4,8 \cdot 10^{-5}, \tag{5}$$

$$\Delta\alpha_1 \approx 1,6 \cdot 10^{-5}. \tag{6}$$

b) Na ekranie, między n-tym a $n+1$ prążkiem będą miejsca, do których nie dolatują cząsteczki, jeśli

$$\alpha_n^- < \alpha_{n+1}^+ \tag{7}$$

czyli

$$n\frac{h}{md}\frac{1}{v_0 - \Delta v} < (n+1)\,\frac{h}{md}\frac{1}{v_0 + \Delta v}$$

co daje

$$\Delta v < \frac{v_0}{2n+1}. \tag{8}$$

Jeśli powyższa nierówność będzie spełniona, to również między $n-1$ a n-tym prążkiem będzie obszar, do którego nie dolatują cząsteczki. Zatem wzór (8) jest szukanym warunkiem na dopuszczalny rozrzut prędkości.

Zadanie 3

Rozważmy gumowy balonik, który po nadmuchaniu powietrzem ma kształt kuli.

a) Gdy promień balonika wynosił $r_1 = 0,1\,\mathrm{m}$, to wewnątrz panowało ciśnienie $p_1 = 1,1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$. Jakie ciśnienie panuje wewnątrz balonika, po nadmuchaniu go tak, by miał promień $r_2 = (3/2)r_1$? W obu przypadkach temperatura powietrza wewnątrz balonika jest równa temperaturze otoczenia i wynosi $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Ciśnienie powietrza otaczającego balonik jest równe $p_0 = 1,0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$.

b) Balonik o promieniu r_2 (czyli po nadmuchaniu zgodnie z pkt. a)) zanurzono powoli w wodzie na taką głębokość, by jego promień zmalał do $r_3 = r_1$. Ile wynosi ta głębokość? Jakie są temperatura i ciśnienie wewnątrz balonika po zanurzeniu? Zakładamy, że powłoka balonika nie przepuszcza ciepła. Początkowa temperatura wewnątrz balonika była równa T_0. Balonik przed zanurzeniem znajdował się tuż nad powierzchnią wody.

c) Jaką pracę wykonano w trakcie zanurzania zgodnie z pkt. b)?

Energia sprężysta gumy, z której jest wykonany balonik, jest równa $E_\mathrm{s} = (1/2)\alpha S^2$, gdzie α jest pewną stałą, a S – powierzchnią balonika. Balonik jest na tyle mały, że również po zanurzeniu w wodzie ma kształt kuli. Przyjmij, że powietrze zachowuje się jak gaz doskonały o molowym cieple właściwym przy stałej objętości $c_V = (5/2)R$, gdzie R jest uniwersalną stałą gazową. Guma z której jest wykonany balonik ma zaniedbywalną masę oraz zaniedbywalną pojemność cieplną. Zaniedbaj również gęstość powietrza w porównaniu z gęstością wody $d_\mathrm{w} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$.

Rozwiązanie zadania 3.

a) W stanie równowagi, przy infinitezymalnej zmianie promienia o dr, suma prac wykonanych przez siły ciśnienia zewnętrznego i wewnątrznego jest równa zmianie energii spężystej balonika

$$(p - p_0)\Delta V = \Delta E_s,$$

czyli

$$(p - p_0)4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\alpha\,(4\pi)^2\,4r^3 dr,$$

co daje

$$p - p_0 = 8\pi\alpha r. \tag{1}$$

Dla promieni r_1 i r_2 dostajemy

$$p_1 - p_0 = 8\pi\alpha r_1,$$
$$p_2 - p_0 = 8\pi\alpha r_2,$$

stąd

$$\frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Ostatecznie

$$p_2 = \frac{r_2}{r_1}(p_1 - p_0) + p_0 = 1,15 \cdot 10^5\mathrm{Pa}. \tag{2}$$

b) Ponieważ w tym procesie nie ma przepływu ciepła, a zanurzanie odbywa się powoli, z równania adiabaty $pV^\gamma = \mathrm{const}$ mamy

$$p_2\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)^\gamma = p_3\left(\frac{4}{3}\pi r_3^3\right)^\gamma,$$

gdzie p_3 jest ciśnieniem w baloniku po zanurzeniu go w wodzie (tak by miał promień r_3), a $\gamma = (c_V + R)/c_V = 7/5$. Stąd

$$p_3 = p_2 \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma} \approx 6,3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \tag{3}$$

zatem ciśnienie wody na zewnątrz balonika jest równe

$$p_w = p_3 - 8\pi\alpha r_3 = p_3 - (p_1 - p_0)\frac{r_3}{r_1} \approx 6,2 \cdot 10^5 \text{Pa}. \tag{4}$$

W wodzie, na głębokości h, ciśnienie jest równe $p_0 + d_\mathrm{w} g h$, zatem

$$h = \frac{p_w - p_0}{d_w g} \approx 53\,\mathrm{m}. \tag{5}$$

Temperaturę wewnątrz balonika po zanurzeniu wyznaczymy korzystając z równania stanu gazu doskonałego $pV = NRT$:

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{NR} = \frac{p_3 V_3}{p_2 V_2 / T_0} = \frac{p_3}{p_2}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^3 T_0 = \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma - 3} T_0 \approx 488\,\mathrm{K}. \tag{6}$$

c) – I sposób

Praca wykonana w tym procesie jest równa zmianie energii układu równej sumie zmian energii wewnętrznej gazu ΔE_g, energii sprężystości gumy balonika ΔE_S i energii objętościowej otoczenia ΔE_o

$$\Delta E_\mathrm{g} = N c_V \left(T_3 - T_0\right), \tag{7}$$

$$\Delta E_\mathrm{S} = 8\pi^2\alpha \left(r_3^4 - r_2^4\right) \tag{8}$$

Energia objętościowa jest równa pracy potrzebnej do "rozepchnięcia" wody (lub innego ośrodka), tak by w nim zmieściło się dane ciało i wynosi $E_o = pV$. (Łatwo sprawdzić, że dla ciała o stałej objętości zmiana energii objętościowej przy zanurzeniu ciała jest równa pracy wykonanej w tym procesie.) W naszym przypadku

$$\Delta E_o = -\frac{4}{3}\pi p_0 r_2^3 + \frac{4}{3}\pi p_w r_3^3, \tag{9}$$

zatem

$$W = N c_V \left(T_3 - T_0\right) + 8\pi^2\alpha\left(r_3^4 - r_2^4\right) + \frac{4}{3}\pi\left(-p_0 r_2^3 + p_w r_3^3\right). \tag{10}$$

Ilość gazu (liczba moli) gazu jest równa $N = p_2 V_2/(RT_0)$, stała $\alpha = (p_1 - p_0)/(8\pi r_1)$. Pozostałe parametry już wyznaczyliśmy, zatem

$$\begin{aligned}
W &= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V}{R}\frac{p_2 r_2^3}{T_0}\left(T_3 - T_0\right) + \pi\frac{p_1 - p_0}{r_1}\left(r_3^4 - r_2^4\right) + \frac{4}{3}\pi p_w r_3^3 - \frac{4}{3}\pi p_0 r_2^3 \qquad (11)\\
&= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V}{R} p_2 r_2^3\left[\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi}{3}\frac{p_1 - p_0}{r_1} r_3^4 - \pi\frac{p_1 - p_0}{r_1} r_2^4 \\
&+ \frac{4}{3}\pi p_2\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma} r_3^3 - \frac{4}{3}\pi p_0 r_2^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V + R}{R} p_2 r_2^3\left[\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi}{3}\frac{p_1 - p_0}{r_1}\left(r_3^4 - r_2^4\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V + R}{R}\left(p_0 + \frac{p_1 - p_0}{r_1} r\right) r_2^3\left[\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi}{3}\frac{p_1 - p_0}{r_1}\left(r_3^4 - r_2^4\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie wynik można zapisać w postaci

$$W = \frac{4}{3}\pi \frac{c_V + R}{R}\left(p_0 + \frac{p_1 - p_0}{r_1} r_2\right) r_2^3 \left[\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi}{3}\frac{p_1 - p_0}{r_1}\left(r_3^4 - r_2^4\right). \qquad (12)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy, że szukana praca jest równa

$$W \approx 3,6 \cdot 10^3 \text{ J}. \qquad (13)$$

c) – II sposób

Siła wyporu działająca na zanurzony balonik jest równa

$$F_w = \frac{4}{3}\pi r^3 d_{\mathrm{w}} g,$$

gdzie r jest promieniem balonika znajdującego się na głebokości z.

Zgodnie z wzorami (3) i (4) związek między promieniem balonika a głębokością jest dany wzorem

$$p_0 + d_w g z = p_2 \left(\frac{r_2}{r}\right)^{3\gamma} - (p_1 - p_0)\frac{r}{r_1}$$

stąd praca jest równa

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^h F_w dz = \int_{r_2}^{r_3} \frac{4}{3}\pi r^3 \left[p_2 (-3\gamma)\frac{(r_2)^{3\gamma}}{r^{3\gamma+1}} - (p_1 - p_0)\frac{1}{r_1}\right] dr = \qquad (14)\\
&= \frac{4}{3}\pi \int_{r_2}^{r_3} \left[p_2 (-3\gamma)\frac{(r_2)^{3\gamma}}{r^{3\gamma-2}} - (p_1 - p_0)\frac{r^3}{r_1}\right] dr\\
&= \frac{4}{3}\pi \left[p_2 \frac{-3\gamma}{3-3\gamma}\frac{(r_2)^{3\gamma}}{r^{3\gamma-3}} - \frac{1}{4}(p_1 - p_0)\frac{r^4}{r_1}\right]_{r_2}^{r_3}\\
&= \frac{4}{3}\pi \left[p_2 \frac{c_V + R}{R}\frac{(r_2)^{3\gamma}}{r_3^{3\gamma-3}} - p_2 \frac{c_V + R}{R} r_2^3 - \frac{1}{4}(p_1 - p_0)\frac{r_3^4}{r_1} + \frac{1}{4}(p_1 - p_0)\frac{r_2^4}{r_1}\right]\\
&= \frac{4}{3}\pi \left\{p_2 \frac{c_V + R}{R} r_2^3 \left[\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{1}{4}(p_1 - p_0)\frac{r_3^4}{r_1} + \frac{1}{4}(p_1 - p_0)\frac{r_2^4}{r_1}\right\}
\end{aligned}$$

co jest zgodne z (12).