LIV OLIMPIADA FIZYCZNA (2004/2005). Stopień II, zadanie doświadczalne – D.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Wysmołek – sekretarz naukowy do zad. dośw., IFD UW;
Jacek Jasiak, Andrzej Wysmołek: *Fizyka w Szkole* nr 3, 2005.

Nazwa zadania: Wyznaczanie gęstości liniowej drutu korzystając z generatora drgań.

Działy: Drgania mechaniczne, mechanika

Słowa kluczowe: fala poprzeczna, drgania mechaniczne, struna, częstość drgań, częstotliwość, gęstość liniowa, generator, magnes.

Zadanie doświadczalne – D, zawody II stopnia, LIV OF.

Masz do dyspozycji:
- cienki drut z niemagnetycznego metalu,
- silny magnes stały,
- ciężarek o masie $m = (100{,}0 \pm 0{,}5)$ g,
- statyw, pręty stalowe, uchwyty,
- linijkę,
- generator napięcia sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości,
- przewody elektryczne z zaciskami,
- papier milimetrowy.

Wyznacz gęstość liniową (masę na jednostkę długości) drutu.
Przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9{,}81$ m/s^2.

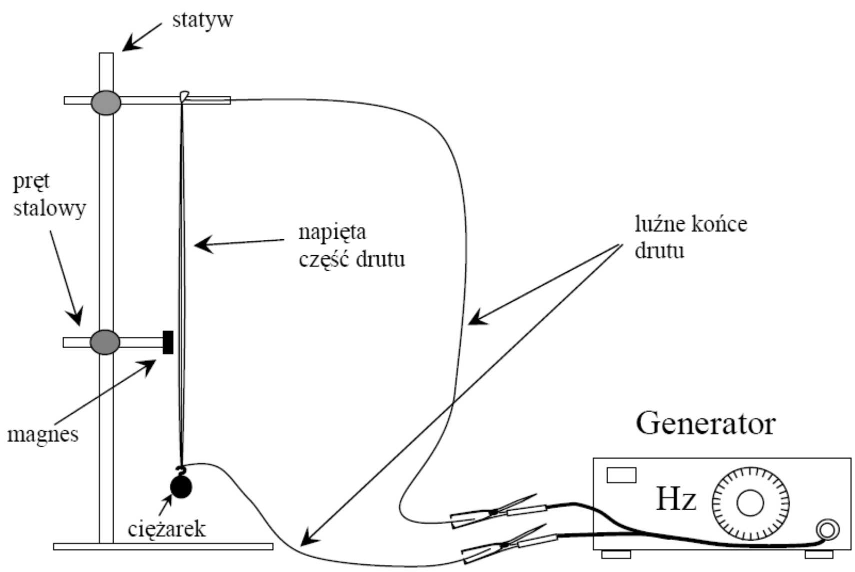
Wskazówka:
Prędkość V fal poprzecznych w strunie o gęstości liniowej μ napiętej siłą F wyraża się wzorem: $V = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Zadanie można rozwiązać badając częstotliwość drgań własnych drutu obciążonego ciężarkiem (rys.1).

Ciężarek należy zawiesić na statywie wykorzystując tylko część drutu. Luźne końce drutu należy połączyć z zaciskami generatora za pomocą „krokodylków”. Należy zadbać, aby nie wprowadziło to dodatkowego napięcia drutu. Na odcinek drutu o długości ΔL znajdujący się w pobliżu magnesu działa siła elektrodynamiczna proporcjonalna do chwilowej wartości natężenia prądu i płynącego przez drut oraz indukcji pola magnetycznego B wytwarzanego przez magnes ($F = B\,i\,\Delta L$). Kierunek siły jest prostopadły zarówno do kierunku prądu, jak i wektora indukcji B. Ponieważ przez drut płynie prąd zmienny to zwrot siły zmienia się z częstotliwością zadaną przez generator. Częstotliwość prądu wytwarzanego przez generator można dobrać tak, aby zrównała się z częstotliwością drgań własnych drutu. W rezonansie nawet niewielkie zaburzenie periodyczne może doprowadzić do tak dużego wzrostu amplitudy drgań, że będzie można je zaobserwować bez żadnych dodatkowych przyrządów. Wtedy możliwe będzie odczytanie częstotliwości rezonansowej wprost ze skali generatora.



Rys. 1

Jeśli potraktować drut jak strunę zamocowaną z dwóch końców, to długość fali odpowiadająca jego kolejnym drganiom własnym wyniesie:

$$\lambda_n = 2 \cdot \frac{L}{n}, \tag{1}$$

gdzie n – liczba naturalna.

Z drugiej strony długość fali λ można wyrazić przez prędkość V oraz częstotliwość f_n fali rozchodzącej się w strunie:

$$\lambda_n = \frac{V}{f_n}. \tag{2}$$

Po podstawieniu związku (2) do (1) i skorzystaniu ze związku $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ podanego we wskazówce do zadania, otrzymujemy wyrażenie na częstotliwość kolejnych drgań własnych układu:

$$f_n = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot n, \tag{3}$$

co można przedstawić w postaci:

$$f_n = f_1 \cdot n, \tag{4}$$

gdzie $f_1 = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ – częstotliwość drgania podstawowego.

Przed zastosowaniem tego wzoru w dalszych rozważaniach, należy się zastanowić czy rzeczywiście można potraktować drut obciążony ciężarkiem jak strunę zamocowana z dwóch końców. Można do tego zagadnienia podejść na różne sposoby:

1. Można sprawdzić doświadczalnie, że kolejne częstotliwości rezonansowe drutu są wielokrotnościami częstotliwości podstawowej i w ten sposób wykazać zasadność stosowania wzoru (3).
2. Można argumentować, że drut jest bardzo cienki i dlatego można pominąć wpływ jego sztywności na częstotliwość drgań układu. Ponieważ ma on znikomą masę w porównaniu z masa ciężarka to jego zamocowanie od strony ciężarka można uznać za sztywne. Dodatkowo niewielka masa drutu powoduje, że siłę naciągu drutu można uznać za stałą na całej długości jego napiętej części. Naciąg określony jest wtedy jedynie przez ciężar ob-

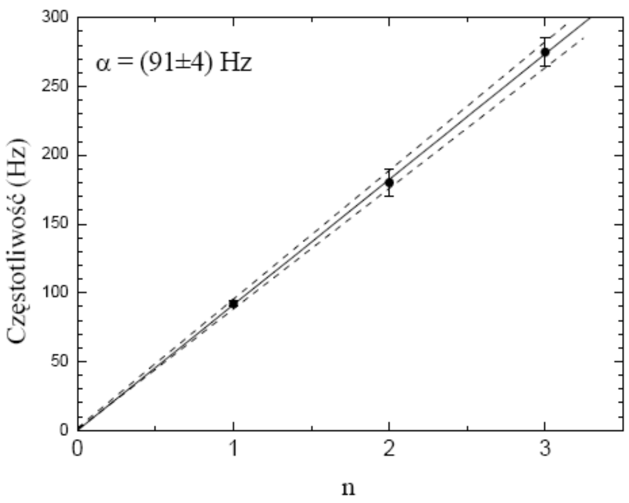
ciążnika. Przy spełnieniu powyższych warunków równanie (3) jest również spełnione i szukaną gęstość liniowa struny wyrazić można wzorem:

$$\mu = \frac{1}{4 \cdot L^2} \cdot \frac{F}{f_1^2}. \qquad (5)$$

Część doświadczalna

Obciążamy ciężarkiem drut i zawieszamy go na statywie, tak by zwisał tuz przy magnesie. Magnes powinien być umieszczony na takiej wysokości, na której spodziewamy się strzałki drgań drutu. Dla drgań podstawowych ($\lambda = 2L$), będzie to w połowie drutu, dla drugiej częstotliwości własnej ($\lambda = L$) w odległości $1/4$ drutu, a dla trzeciej ($\lambda = 2/3L$) odpowiednio w $1/6$ lub $1/2$ odległości od jednego z końców. Po podłączeniu drutu do generatora ustawiamy najniższą możliwą częstotliwość prądu i powoli ja zwiększamy, aż do uzyskania rezonansu. W przypadku, gdy amplituda drgań jest zbyt duża i drut uderza o magnes, należy zwiększyć jego odległość od magnesu. Ze skali generatora odczytujemy wartości częstotliwości, dla których amplituda drgań drutu silnie wzrasta.

W doświadczeniu wykonanym przez recenzenta użyto generatora G432 o oporności wyjściowej 50 Ω. Bez obciążenia amplituda napięcia na wyjściu tego generatora wynosiła 5 V. Dla drutu miedzianego o średnicy 0,15 mm i długości części drgającej $L = (43{,}2 \pm 0{,}2)$ cm (zmierzonej linijką), przy naciągu $F = mg = (0{,}98 \pm 0{,}005)$ N wyznaczono częstotliwość drgania podstawowego drutu $f_1 = (92 \pm 2)$ Hz. Kolejne częstotliwości rezonansowe wynosiły odpowiednio 180 ± 10 Hz, 275 ± 10 Hz. Wyniki te możemy nanieść na wykres i dopasować prostą (rys. 2).



Rys. 2

Z wykresu wynika, że w granicach niepewności odczytu, zmierzone częstotliwości są równe kolejnym wielokrotnościom częstotliwości drgań podstawowych f_1. Biorąc pod uwagę współczynnik nachylenia prostej $\alpha = (91 \pm 4)$ Hz, uzyskany z dopasowania do danych eksperymentalnych, i korzystając ze wzoru (4) otrzymamy $\mu = (1{,}60 \pm 0{,}14)\cdot 10^{-4}$ kg/m. Ponieważ niepewność względna wyznaczenia częstotliwości podstawowej drgań $\Delta f_1/f_1 \approx 0{,}02$ jest znacznie większa od niepewności względnej długości drutu i masy ciężarka $\Delta L/L \approx \Delta m/m = 0{,}005$, to bez uszczerbku dla dokładności wyniku końcowego, gęstość liniową drutu można wyznaczyć bez pomiaru wyższych częstotliwości rezonansowych. Po podstawieniu danych do wzoru (5) uzyskujemy wtedy wartość $\mu = (1{,}55 \pm 0{,}07)\cdot 10^{-4}$ kg/m. Dla drutu o średnicy 0,15 mm daje to gęstość objętościową $(8{,}8 \pm 0{,}4)\cdot 10^3$ kg/m^3, która zgadza się z wartością gęstości podawanej dla miedzi $8{,}95\cdot 10^3$ kg/m^3.

Proponowana punktacja

Część teoretyczna

1) Pomysł badania drgań drutu obciążonego ciężarkiem:
   a) sposób zawieszenia ciężarka 1 pkt
   b) pozostawienie luźnych końców drutu 1 pkt.
2) Pomysł rezonansowego pobudzania drgań drutu przy użyciu generatora i magnesu stałego:
   a) analiza sił działających w układzie 2 pkt,
   b) omówienie roli efektów rezonansowych 1 pkt
3) Wyprowadzenie związku częstotliwości drgań rezonansowych drutu z jego gęstością liniową:
   a) wyprowadzenie wzorów 3 pkt
   b) uzasadnienie możliwości stosowania wzorów dla struny zamocowanej sztywno z dwóch konców lub sprawdzenie eksperymentalne związku (4) 2 pkt

Część doświadczalna

1) Zestawienie układu pomiarowego umożliwiającego pomiar częstotliwości drgań własnych drutu:
   a) zamocowanie drutu i magnesu na statywie 1 pkt
   b) dobranie właściwego położenia magnesu względem drutu 2 pkt
2) Wykonanie pomiarów umożliwiających wyznaczenie gęstości liniowej drutu:
   a) pomiar częstotliwości rezonansowej 3 pkt
   b) pomiar długości drutu 1 pkt
   c) obliczenie wartości siły naciągu 1 pkt
3) Wynik końcowy:
   a) uzyskanie poprawnej wartości liczbowej 1 pkt
   b) oszacowanie niepewności pomiarowej z wykresu lub innymi metodami 1 pkt