

# LIII Olimpiada Fizyczna

## zawody II stopnia

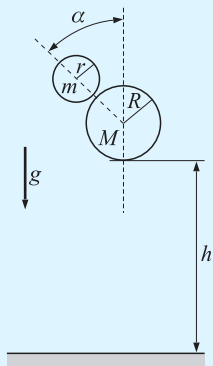
### ZADANIE 1

Z wysokości  $h = 1$  m (nad poziomą podłogą) puszczono jednocześnie dwie kulki: większą o masie  $M$  i promieniu  $R$  i mniejszą o masie  $m$  i promieniu  $r$ . W chwili wypuszczenia kulki były bardzo blisko siebie, ale nie stykały się, odcinek łączący ich środki tworzył z pionem kąt  $\alpha$ , a kulka większa była niżej niż mniejsza (patrz rysunek). Zakładamy, że wszystkie zderzenia są doskonale sprężyste i trwają nieskończenie krótko. Pomijamy opór powietrza. Kulki są idealnie gładkie. Przyjmujemy również, że  $M$  jest dużo większe niż  $m$ , a  $h$  dużo większe niż  $R$ .

□ a) Dla jakiego  $\alpha$  mniejsza kulka polecą najwyżej po pierwszym zderzeniu? Ile wynosi ta wysokość?

□ b) Zakładając, że kulki nie zderzą się ze sobą ponownie, oblicz – w zależności od kąta  $\alpha$  – odległość między miejscem pierwszego uderzenia mniejszej kulki o podłogę, a punktem odbicia większej kulki od podłogi.

□ c) Dla jakiego  $\alpha$  odległość wyznaczona w punkcie b) jest największa? Ile wynosi ta odległość?



### ROZWIĄZANIE

W zagadnieniu występują kolejno następujące fazy: (i) spadek swobodny obu kulek; (ii) odbicie sprężyste większej kulki od podłogi; (iii) zderzenie sprężyste mniejszej kulki z większą; (iv) ruch swobodny mniejszej kulki w polu grawitacyjnym (większa już nas nie interesuje).

■ ad (i) Tuż przed fazą (ii) obie kulki mają taką samą prędkość  $V$  (skierowaną w dół), którą możemy wyznaczyć z zasady zachowania energii:  $V = \sqrt{2gh}$ .

■ ad (ii) W wyniku odbicia większej kulki od podłogi wartość jej prędkości się nie zmienia (odbicie jest sprężyste), natomiast zmienia się zwrot.

■ ad (iii) Przed zderzeniem współrzędne prędkości kulek są następujące:

Duża kulka: pionowa  $V_p^y = V$ , pozioma  $V_p^x = 0$ .

Mała kulka: pionowa  $v_p^y = -V$ , pozioma  $v_p^x = 0$ .

W układzie odniesienia, w którym duża kulka spoczywa, współrzędne prędkości mniejszej kulki są równe: pionowa  $v_p^y = -2V$ , pozioma  $v_p^x = 0$ .

Ponieważ duża kulka ma masę dużo większą niż mała, w wyniku zderzenia jej prędkość się nie zmienia. W układzie dużej kulki wartość prędkości małej kulki nie ulegnie zmianie, ale odbicie zajdzie zgodnie z zasadą, że kąt odbicia równa się kątowi padania. Zatem w układzie dużej kulki współrzędne prędkości małej kulki po zderzeniu będą równe: pionowa  $v_k^y = 2V \cos 2\alpha$ , pozioma  $v_k^x = 2V \sin 2\alpha$  (oś  $x$  na rysunku kierujemy poziomo w lewo).

Przechodząc z powrotem do układu podłogi otrzymamy

$$v_k^y = v_k^y + V = V(2 \cos 2\alpha + 1), \quad v_k^x = v_k^x = 2V \sin 2\alpha.$$

■ ad (iv) W tym przypadku mamy do czynienia z rzutem ukośnym z prędkością początkową o współrzędnych  $(v_k^x, v_k^y)$ . Czas  $t$  tego rzutu (do momentu uderzenia w podłogę) to czas potrzebny na zmianę prędkości pionowej z  $v_k^y$  na  $-v_k^y$ , czyli  $t = \frac{2v_k^y}{g}$ . W tym czasie mniejsza kulka przebędzie w poziomie drogę

$$l = v_k^x \cdot t = 2V \sin 2\alpha \cdot \frac{V(2 \cos 2\alpha + 1)}{g} = \frac{4V^2}{g} \sin 2\alpha (2 \cos 2\alpha + 1) = 8h \sin 2\alpha (2 \cos 2\alpha + 1).$$

Aby znaleźć maksimum tej funkcji, policzmy jej pochodną po  $\alpha$ :

$$\frac{dl}{d\alpha} = 16h(4 \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 2).$$

Przyrównując tę wielkość do zera, otrzymujemy równanie kwadratowe na  $\cos 2\alpha$  z rozwiązaniami

$$\cos 2\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

Oczekujemy, że  $2\alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$  (mała kulka po odbiciu powinna polecieć choć trochę do góry), zatem

$$\cos 2\alpha = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}.$$

Wtedy  $\alpha \approx 26,812^\circ$ ,  $\sin 2\alpha = \frac{1}{8}\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}$ .

Zasięg  $l$  odpowiadający takiemu  $\alpha$  wynosi

$$\frac{1}{4}h(3 + \sqrt{33})\sqrt{30 + 2\sqrt{33}} \approx 14,081h.$$

Największą wysokość, jaką osiągnie mała kulka, znajdujemy z zasady zachowania energii:

$$y_{\max} = \frac{(v_k^2)}{2g} = \frac{V^2(2\cos 2\alpha + 1)^2}{2g} = h(2\cos 2\alpha + 1)^2.$$

Wysokość ta jest największa dla  $\alpha = 0$  i wynosi wtedy  $9h$ . Dla  $\alpha$  odpowiadającego największemu zasięgowi otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_{\max} &= h\left(2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} + 1\right)^2 = \\ &= \frac{h}{16}(3 + \sqrt{33})^2 \approx 4,779h. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:**

- a) Największa wysokość odpowiada  $\alpha = 0$  i wynosi  $9h = 9$  m.
- b) Zasięg wyrażony jest wzorem  $l = 8h \sin 2\alpha(2\cos 2\alpha + 1)$ .
- c) Największy zasięg jest dla

$$\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}\right) \approx 26,812^\circ$$

i wynosi

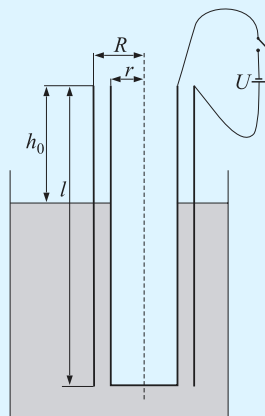
$$\frac{1}{4}h(3 + \sqrt{33})\sqrt{30 + 2\sqrt{33}} \approx 14,081h = 14,081 \text{ m}.$$

Otrzymane wyniki warto jest porównać z sytuacją, gdy początkowo na wysokości  $h$  znajduje się tylko mała kulka, a duża spoczywa na podłożu. W tym przypadku, po odbiciu mniejszej kulki od większej mamy do czynienia z rzutem ukośnym pod kątem  $2\alpha$  w stosunku do pionu z prędkością początkową  $V = \sqrt{2gh}$ . Analogiczne wyniki są następujące: największa wysokość jest też dla  $\alpha = 0$  i wynosi  $h$ . Zasięg jest równy  $2h \sin 4\alpha$ . Największy zasięg jest dla  $\alpha = 22,5^\circ$  i wynosi  $2h$ .

### ZADANIE 2

Rozważamy kondensator walcowy o promieniu zewnętrznym  $R$  i wewnętrznym  $r$  oraz długości  $l$ , przy czym  $l \gg R$ . Pojemność tego kondensatora wynosi  $C_0$ , a okładki są bardzo cienkie. Nienaladowany kondensator włożono do nieprzewodzącej cieczy o gęstości  $\rho$  i stałej dielektrycznej  $\epsilon_r$ . Kondensator

plywa w pozycji pionowej, nad cieczą znajduje się jego fragment o długości  $h_0$  (rysunek). Następnie okładki kondensatora połączono nieważkimi przewodami z baterią o napięciu  $U$ . Jaka będzie długość  $h$  części kondensatora nad cieczą? Zakładamy, że ciecz może swobodnie wpływać w obszar między okładkami, natomiast nie wpływa do obszaru między wewnętrzną okładką a osią kondensatora. Powierzchnia cieczy, która wpłynęła do obszaru między okładkami, jest pozioma (zapewnia to cienki, odpowiednio dopasowany krążek z dielektryka, który może swobodnie przesuwać się w tym obszarze. Pozioma jest również powierzchnia cieczy poza kondensatorem (pomiary napięcie powierzchniowe). Zakładamy, że poziomy cieczy – zarówno na zewnątrz jak i wewnątrz kondensatora – są odległe od końców walca i że walec w obu rozpatrywanych przypadkach pływa pionowo w cieczy. Przyjmij, że wartość przyspieszenia ziemskiego jest znana i wynosi  $g$ .



### ROZWIĄZANIE

#### ■ 1. Obliczenie pojemności kondensatora częściowo wypełnionej cieczą.

Znajdźmy najpierw pole elektryczne pomiędzy okładkami nieskończonego kondensatora walcowego. Jedynym polem o symetrii zgodnej z symetrią kondensatora (niezmienniczość przy obrotach wokół osi walca, przy przesunięciach wzdłuż osi walca i przy odbiciach względem płaszczyzn symetrii kondensatora) jest pole prostopadłe do osi kondensatora i o wartości zależnej tylko od odległości  $a$  od tej osi:  $\vec{E} = E(a) \cdot \vec{e}_a$ , gdzie  $\vec{e}_a$  jest wektorem prostopadłym do osi walca (i jednocześnie prostopadłym do okładek). Takie pole jest jednocześnie bezwirowe i prostopadłe do okładek. Strumień tego pola przez powierzchnię będącą współosiowym z kondensatorem walcem o promieniu  $a$ , gdzie  $R > a > r$ , i długości  $\Delta z$  jest równy  $2\pi a \Delta z E(a)$ .

Na podstawie prawa Gaussa ten strumień jest niezależny od  $a$  dla  $R > a > r$ , zatem  $E(a) = \frac{A}{a}$ , gdzie  $A$  jest pewną stałą niezależną od  $a$ , ale proporcjonalną do różnicy potencjałów  $U$  między okładkami. Zatem ostatecznie

$$E(a) = \frac{\alpha U}{a}. \quad (1)$$

Jeśli kondensator jest w części wypełniony dielektrykiem w sposób, jaki rozważamy w zadaniu, to pole elektryczne pomiędzy okładkami nadal ma powyższą postać, gdyż takie pole nadal jest bezwzględnie, spełnia warunki brzegowe (jest prostopadłe do okładki) i nadal spełnia prawo Gaussa.

Do tej pory rozważaliśmy kondensator nieskończony. W przypadku kondensatora skończonego zakładamy, że pole elektryczne jest nadal w jego wnętrzu określone przez równanie (1). Odpowiada to pominięciu efektów brzegowych i jest uzasadnione, gdy  $l \gg R$ .

Strumień indukcji pola elektrycznego przez powierzchnię walca o promieniu  $a$  (znowu  $R > a > r$ ), współosiowego z naszym kondensatorem oraz zaczynającego się i kończącego tam gdzie nasz kondensator (czyli o  $\Delta z = l$ ) jest równy

$$\begin{aligned} \Phi &= y \cdot 2\pi a \varepsilon_0 \varepsilon_r E(a) + (l - y) \cdot 2\pi a \varepsilon_0 E(a) = \\ &= 2\pi \varepsilon_0 [l + y(\varepsilon_r - 1)] \alpha U, \end{aligned}$$

gdzie  $y$  jest długością części kondensatora wypełnionej dielektrykiem,  $\varepsilon_0 \varepsilon_r E(a)$  – indukcją pola elektrycznego w obszarze, gdzie jest dielektryk, a  $\varepsilon_0 E(a)$  – indukcją pola elektrycznego w obszarze, gdzie nie ma dielektryka. Na podstawie prawa Gaussa strumień  $\Phi$  jest równy ładunkowi na wewnętrznej okładce  $Q$ , czyli

$$2\pi \varepsilon_0 [l + y(\varepsilon_r - 1)] \alpha U = Q.$$

Pojemność kondensatora jest równa

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi \varepsilon_0 [l + y(\varepsilon_r - 1)] \alpha.$$

Dla  $y = 0$  (pusty kondensator)  $C = C_0$ , co pozwala na wyznaczenie stałej  $\alpha$ . Ostatecznie

$$C = C(y) = [l + y(\varepsilon_r - 1)] C_0.$$

## 2. Wyznaczenie wysokości $y$ , na jaką jest wciągana ciecz między okładkami kondensatora.

Wprowadźmy zmienną  $x = l - h$  mierzącą głębokość, na jaką zanurza się kondensator.

a) Jeśli kondensator jest naładowany, ale odłączony od baterii, to, przy ustalonym zewnętrznym poziomie cieczy  $x$ , wewnętrzny poziom cieczy  $y$  znajdziemy żądając, by minimalna była suma grawitacyjnej energii potencjalnej cieczy (równej iloczynowi ciężaru części cieczy wewnątrz kondensatora powyżej poziomu zewnętrznego przez wysokość jej

środką ciężkości) i energii elektrostatycznej kondensatora:

$$E_g + E_e = \rho g(y - x)\pi(R^2 - r^2)\frac{y - x}{2} + \frac{Q^2}{2C}.$$

Różniczkując powyższe wyrażenie po  $y$  i przyrównując do 0, dostajemy

$$\rho g(y - x)\pi(R^2 - r^2) - \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dy} = 0.$$

Wstawiając  $\frac{dC}{dy} = (\varepsilon_r - 1) \frac{C_0}{l}$  i  $\frac{Q}{C} = U$ , otrzymujemy

$$y = x + \frac{U^2}{2} (\varepsilon_r - 1) \frac{C_0}{\rho g l \pi (R^2 - r^2)}. \quad (2)$$

Ponieważ siła wciągająca ciecz do kondensatora jest czysto elektrostatyczna – zależy tylko od rozkładu ładunków w jego wnętrzu i układu dielektryków – zatem nie ulegnie zmianie, jeśli do okładki kondensatora podłączymy napięcie równe  $Q/C$ . Powyższy wzór obowiązuje zatem również w sytuacji rozważanej w zadaniu.

b) Ten sam wynik otrzymamy, rozważając kondensator cały czas podłączony do baterii, ale wtedy musimy uwzględnić również jej energię równą  $-UQ$ . Żądamy wtedy, by w stanie równowagi wielkość

$$E_g + E_e - UQ = \rho g(y - x)\pi(R^2 - r^2)\frac{y - x}{2} - \frac{C(y)U^2}{2}$$

była minimalna ze względu na zmiany wewnętrzne-go poziomu cieczy przy ustalonym  $U$ .

## 3. Wyznaczenie głębokości zanurzenia kondensatora.

Dla danego  $y$  głębokość, na jaką zanurzy się kondensator, możemy wyznaczyć z prawa Archimidesa

$$Mg + \rho g y \pi (R^2 - r^2) = \rho g x \pi R^2, \quad (3)$$

gdzie  $M$  jest masą kondensatora. Tym samym

$$Mg = \rho g y \pi r^2 - \rho g (y - x) \pi R^2.$$

Gdy  $U = 0$ , mamy  $x = y = l - h_0$ , stąd

$$Mg = \rho g (l - h_0) \pi r^2,$$

a łącząc dwa ostatnie równania, otrzymujemy

$$g(l - h_0) \pi r^2 = \rho g y \pi r^2 - \rho g (y - x) \pi R^2,$$

co wygodnie jest przekształcić do postaci

$$g(x - l + h_0) \pi r^2 = \rho g (y - x) \pi (R^2 - r^2),$$

aby następnie wstawić po prawej stronie  $y$  wyrażone wzorem (2):

$$g(x - l + h_0) \pi r^2 = \frac{C_0 (\varepsilon_r - 1) U^2}{2l}.$$

Stąd wyliczamy ostatecznie

$$h = l - x = h_0 - \frac{C_0 (\varepsilon_r - 1) U^2}{2g l \pi r^2}. \quad (4)$$

**4. Podejście czysto energetyczne.**

Nieco innym podejściem jest zażądanie, by całkowita energia układu, uwzględniająca

- energię elektrostatyczną kondensatora,
  - energię baterii,
  - całkowitą energię grawitacyjną cieczy i
  - energię grawitacyjną (środką masy) kondensatora,
- była minimalna ze względu na zmianę poziomu cieczy wewnątrz kondensatora oraz wysokości jego środka masy (zakładamy, że ściany naczynia są pionowe):

$$E_{\text{cała}} = \rho g(y - x + z)\pi(R^2 - r^2)\frac{y - x + z}{2} + \rho g(x - z)\pi r^2\frac{x - z}{2} + \rho g z(S - \pi R^2)\frac{z}{2} + \frac{CU^2}{2} - UQ - Mg(x - z).$$

gdzie  $z$  jest wysokością zewnętrznego poziomu cieczy (unormowaną tak, by  $z = 0$  dla  $U = 0$ ), a  $S$  – powierzchnią dna naczynia.

Ponieważ całkowita objętość cieczy się nie zmienia,

$$z(S - \pi R^2) + (y - x + z)\pi(R^2 - r^2) + (x - z)\pi r^2 = (h_0 - l)\pi r^2. \quad (5)$$

Jeśli założymy, że  $S \gg \pi R^2$  (uwaga: nie jest to założenie usprawiedliwione treścią zadania i dlatego lepiej było skorzystać wprost z prawa Archimedesasa!), otrzymamy  $z \approx 0$  i w konsekwencji

$$E_{\text{cała}} = \rho g(y - x)\pi(R^2 - r^2)\frac{y - x}{2} + \rho g x \pi r^2\frac{x}{2} - \frac{CU^2}{2} - Mgx.$$

W stanie równowagi to wyrażenie powinno być (lokalnie) minimalne. Oznacza to, że pochodna po  $y$  przy ustalonym  $x$  powinna być równa 0, co prowadzi do równania (2), oraz, że pochodna po  $x$  przy ustalonym  $y$  powinna być równa 0, co prowadzi do równania (3). Oczywiście założenie  $S \gg \pi R^2$  nie jest niezbędne: żądanie, by energia całkowita była minimalna ze względu na zmiany  $x$  i  $y$ , przy założeniu, że  $z$  wyznaczymy z równania (5), daje oczywiście takie same wyniki (inaczej prawo Archimedesasa nie byłoby spełnione).

**5. Podejście opierające się na wyznaczeniu siły, z jaką ładunki w kondensatorze wciągają ciecz między okładki.**

Zamiast uwzględniać energię grawitacyjną cieczy, można zauważyć, że siła wciągająca ją między okładki kondensatora jest związana

- z pochodną energii elektrostatycznej kondensatora ( $\vec{e}_y$  jest tu wektorem skierowanym zgodnie ze wzrostem  $y$ , czyli do góry):

$$\vec{F} = -\vec{e}_y \frac{dE_e}{dy} \Big|_{Q=\text{const}} = -\vec{e}_y \frac{d\left(\frac{Q^2}{2C(y)}\right)}{dy} \Big|_{Q=\text{const}} = \frac{U^2}{2} C_0 \frac{\epsilon_r - 1}{l} \vec{e}_y,$$

gdzie przyjęliśmy (na chwilę, w trakcie różniczkowania – jest to podejście analogiczne do 2a), że  $U = C(y)Q$  i  $Q = \text{const}$ ,

- lub z pochodną sumy energii elektrostatycznej kondensatora i energii baterii:

$$\vec{F} = -\vec{e}_y \frac{d(E_e - UQ)}{dy} \Big|_{U=\text{const}} = -\vec{e}_y \frac{d\left(\frac{-C(y)U^2}{2}\right)}{dy} \Big|_{U=\text{const}} = \frac{U^2}{2} C_0 \frac{\epsilon_r - 1}{l} \vec{e}_y,$$

gdzie przyjęliśmy  $Q = \frac{U}{C(y)}$  i  $U = \text{const}$  (jest to podejście analogiczne do 2b).

Szczęśliwie się składa, że ta siła nie zależy od  $y$ , co radykalnie upraszcza rozwiązanie tą metodą, gdyż nie musimy wyznaczać  $y$ !

Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że woda działa na kondensator (dodatkową) siłą skierowaną przeciwnie, czyli równą  $-\vec{F}$ . Uwzględniając to, dostajemy z prawa Archimedesasa

$$M\vec{g} - \vec{F} = \rho\vec{g}(l - h_0)\pi r^2,$$

co znowu prowadzi do wzoru (4). Trzeba jednak podkreślić, że mimo większej prostoty rachunkowej, to rozwiązanie wymaga bardzo ważnej analizy zwrotów działających sił.

**6. Wprowadzając oznaczenie  $m_c = \rho g \pi r^2 l$ , odpowiadające ciężarowi cieczy wypartej przez całkowicie zanurzony kondensator, możemy napisać trochę bardziej przejrzysty wzór na zmianę długości wystającej części kondensatora:**

$$\Delta h = h - h_0 = -\frac{U^2}{2} (\epsilon_r - 1) \frac{C_0}{m_c}. \quad (6)$$

Ponieważ  $\epsilon_r > 1$ , wzór ten oznacza, że po podłączeniu kondensatora do baterii, niezależnie od znaku  $U$ , jego zanurzenie wzrośnie, czyli wzrośnie wewnętrzny poziom cieczy. Przy ustalonym  $U$  zanurzenie będzie rosło ze wzrostem  $C_0$  i z maleniem  $m_c$ . Masa kondensatora nie ma wpływu na zmianę głębokości zanurzenia pod wpływem  $U$ , choć oczywiście decyduje o wartości  $h_0$ . Należy podkreślić, że wzory (4) i (6) mają stosowność ograniczoną do  $U$  mniejszych od napięcia powodującego całkowite wypełnienie cieczą obszaru między okładkami kondensatora.

**ZADANIE 3**

W pustej przestrzeni znajduje się kulka o promieniu  $r$  oraz małe (w porównaniu z kulką), izotropowe źródło światła (żarówka). Odległość między ich środkami wynosi  $d$ , a temperatura kulki wynosi  $T_1$  (kulka jest w stanie równowagi termodynamicznej z otoczeniem). Między źródło światła

a kulkę, w odległości  $a$  od źródła, wstawiamy ciekłą soczewkę o promieniu  $R = 2r$  i ogniskowej  $f = d/3$ . Oś optyczna soczewki pokrywa się z osią źródła – środek kulki.

□ a) Jaka będzie (po ustaleniu się stanu równowagi) temperatura kulki, jeśli  $a = 2d/5$ ?

□ b) Jaka będzie (po ustaleniu się stanu równowagi) temperatura kulki, jeśli  $a = 3d/5$ ?

□ c) Jaką maksymalną temperaturę kulki (po ustaleniu się stanu równowagi) można osiągnąć, dobierając odpowiednio położenie soczewki?

Przyjmij, że  $r$  jest znacznie mniejsze niż  $d$ . Kulkę traktujemy jako ciało doskonale czarne o nieskończonym przewodnictwie cieplnym. Zakładamy, że soczewka nie pochłania i nie odbija promieniowania. Moc źródła światła w każdym przypadku jest taka sama.

**Wskazówka:** Ciało doskonale czarne pochłania całe padające na nie promieniowanie, natomiast w jednostce czasu emituje promieniowanie o energii  $\sigma ST^4$ , gdzie  $S$  jest jego powierzchnią,  $T$  – temperaturą, a  $\sigma$  stałą uniwersalną (stałą Stefana–Boltzmana).

### ROZWIĄZANIE

W początkowej sytuacji do kulki docierają promienie wysyłane wewnątrz stożka o kącie rozwarcia  $\alpha \approx \frac{r}{d}$ , co odpowiada kątowi bryłowemu  $\pi\alpha^2$ , podczas gdy pełny kąt bryłowy ma miarę  $4\pi$ . Jeśli żarówka ma moc  $P$ , to ilość energii docierającej do kulki w jednostce czasu jest równa  $P \cdot \frac{\pi\alpha^2}{4\pi}$ . Ta energia jest równa energii wypromieniowywanej przez kulkę:

$$P \cdot \frac{\pi\alpha^2}{4\pi} = \sigma \cdot 4\pi r^2 T_1^4.$$

Możemy stąd wyznaczyć moc żarówki:

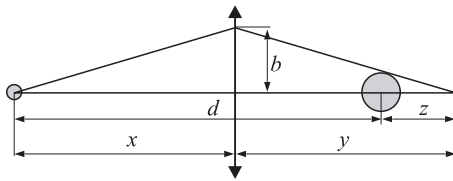
$$P = \frac{16\sigma\pi r^2 T_1^4}{\alpha^2}. \quad (7)$$

Jeśli w odległości  $x$  od żarówki znajduje się soczewka o ogniskowej  $f$  (rysunek), to światło z żarówki jest skupiane w odległości  $y = \frac{fx}{x-f}$  od soczewki, czyli w odległości

$$z = y + x - d = \frac{fx}{x-f} + x - d$$

od środka kulki. Dla  $f = d/3$  ten wzór przyjmuje postać

$$z = \frac{-3dx + 3x^2 + d^2}{3x - d}.$$



Do kulki docierają promienie, które padają na soczewkę w odległości od osi soczewki nie większej niż

$$b = \frac{y}{z}r = \frac{xd}{d^2 + 3x^2 - 3xd}r = \frac{x}{3\left(\frac{x}{d} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}r$$

i jednocześnie nie większej niż promień soczewki  $R = 2r$ . Energia na jednostkę czasu, która dociera do kulki, liczona analogicznie, jak w przypadku bez soczewki, wynosi zatem

$$\frac{(\min(b, R)/x)^2}{4}P.$$

Przyrównując powyższy wzór do  $\sigma \cdot 4\pi r^2 T^4$  i uwzględniając (7), możemy wyznaczyć temperaturę  $T$  w danym przypadku:

$$T = T_1 \left[ \frac{(\min(b, R)/x)^2}{(r/d)^2} \right]^{\frac{1}{4}} = \begin{cases} T_1 \frac{1}{\sqrt{3\left(\frac{x}{d} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} & \text{dla } x \in \left(0; \frac{d}{2}\right) \cup \left(\frac{2d}{3}; 0\right) \\ T_1 \sqrt{\frac{2d}{x}} & \text{dla } x \in \left(\frac{d}{2}; \frac{2d}{3}\right) \end{cases}$$

□ a) W tym przypadku mamy  $x = a = 2d/5$  i otrzymujemy  $z = 7d/5$ ,  $b = 10r/7$ , czyli  $b < R$  i

$$T = \frac{5\sqrt{7}}{7}T_1 \approx 1,89T_1.$$

□ b) W tym przypadku mamy  $x = a = 3d/5$  i otrzymujemy  $z = 7d/20$ ,  $b = 15r/7$ , czyli  $b > R$  i

$$T = \frac{\sqrt{30}}{3}T_1 \approx 1,83T_1.$$

□ c) W tym przypadku należy znaleźć  $x \in (0; d)$  dające maksymalne  $T$ . Wystarczy zauważyć, że maksymalna wartość górnego wyrażenia jest osiągnięta dla  $x = d/2$ , czyli jeszcze w obszarze jego stosowności. Ponieważ wiemy, że dla każdego  $x$  wartość  $T$  jest mniejszą spośród wartości przyjmowanych przez górne i dolne wyrażenie, więc  $x = d/2$  daje maksymalne  $T$ . Podstawiając, otrzymujemy  $T_{\max} = 2T_1$ .

**ZADANIE DOŚWIADCZALNE**

Masz do dyspozycji:

- wkład piszący do ołówka automatycznego,
- dwa szkiełka do mikroskopu,
- linijkę,
- miękkie przewody miedziane z odizolowanymi końcówkami,
- woltomierz,
- amperomierz,
- baterijkę 1,5 V i przewody elektryczne umożliwiające połączenie układu pomiarowego,
- papier milimetrowy.

1. Nie łamiąc wkładu wyznacz jego średnicę.
2. Wyznacz opór właściwy materiału, z którego wykonany jest wkład.

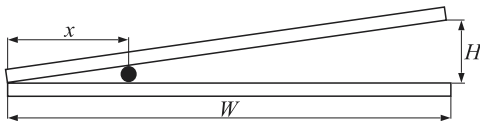
**Uwaga!**

Z wkładem obchodź się ostrożnie, aby go nie poflamać. Jeśli jednak Ci się to zdarzy, poproś asystenta o nowy wkład.

**ROZWIĄZANIE**

**1. Wyznaczenie średnicy wkładu**

Ponieważ średnica wkładu jest mniejsza niż 1 mm, trudno jest ją dokładnie zmierzyć bezpośrednio linijką. Średnicę można wyznaczyć na wiele sposobów. Jeden z nich polega na umieszczeniu wkładu pomiędzy szkiełkami mikroskopowymi w sposób przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1

Wkład powinien być umieszczony równolegle do brzegów szkiełek. Znając jego odległość  $x$  od linii zetknięcia szkiełek oraz odległość między końcami szkiełek  $H$ , można wyznaczyć średnicę wkładu:

$$d = \frac{x}{W}H, \tag{1}$$

gdzie  $W$  – długość szkiełka. Dla zwiększenia dokładności wykonujemy kilka pomiarów dla różnych odległości  $x$ . Następnie wyznaczamy wartość średnią średnicy i jej niepewność pomiarową.

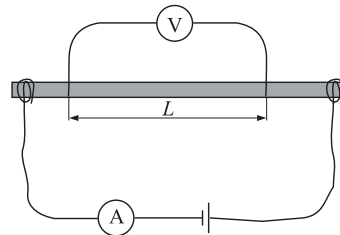
**2. Wyznaczenie oporu właściwego**

Opór elektryczny  $R$  walca o długości  $L$  i średnicy  $d$ , wyraża się wzorem:

$$R = \frac{4\rho}{\pi d^2}L, \tag{2}$$

gdzie  $\rho$  – oporność właściwa materiału walca. Zatem oporność właściwą wkładu można wyznaczyć, mierząc opór jego części o znanych wymiarach. Zadanie to jednak nie jest tak proste, jak mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. Wkłady są małe i delikatne. Trzeba też wymyślić metodę połączenia ich ze źródłem napięcia. W zestawie pomiarowym nie ma „profesjonalnych” zacisków, więc kontakty elektryczne należy sporządzić np. oplatając odizolowane przewody miedziane na końcach wkładu.

Jak się okaże, po podłączeniu wkładu do baterijki, natężenie prądu słabo zależy od odległości między doprowadzeniami prądu. Oznacza to, że opór wkładu jest zbliżony do oporności kontaktów metal-wkład. Zatem, w doświadczeniu należy zastosować odpowiedni układ pomiarowy np. układ czterech sond (kontaktów) przedstawiony na rys. 2. Kontakty prądowe (doprowadzenia prądu) umieszczone są w pobliżu końców wkładu. Sondy napięciowe stanowią odizolowane końcówki przewodów podłączonych do woltomierza. Ponieważ oporność wewnętrzna woltomierza jest bardzo duża, to natężenie płynące przez niego prądu można pominąć w porównaniu z natężeniem prądu płynącego przez wkład.



Rys. 2

Jeśli przez wkład przepływać będzie prąd o natężeniu  $I$ , napięcie  $U$  wskazywane przez woltomierz wyniesie

$$U = \frac{4I\rho}{\pi d^2}L, \tag{3}$$

co można zapisać jako

$$U = aL, \tag{4}$$

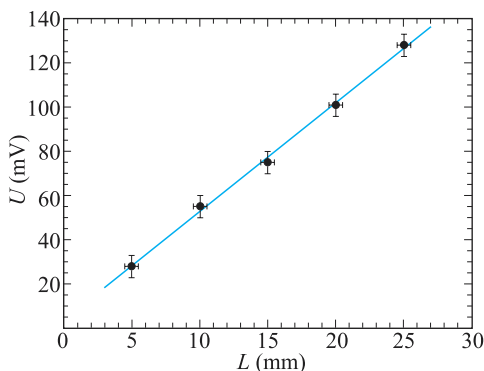
gdzie współczynnik  $a = \frac{4I}{\pi d^2}\rho$ .

Zależność (4) sugeruje wykonanie serii pomiarów dla różnych wartości odległości  $L$  między kontaktami napięciowymi, przy ustalonej wartości prądu płynącego przez wkład. Dopasowanie prostej do zależności  $U(L)$  pozwoli wyznaczyć szukaną oporność właściwą  $\rho$ .

**3. Część doświadczalna**

W celu wyznaczenia średnicy wkładu wykonano kilka pomiarów odległości  $x$  oraz  $H$ . Dla  $x = 7, 6$  oraz  $5$  mm uzyskano odpowiednio  $H = 8, 9$  oraz  $10$  mm. Używając linijki, wyznaczono długość szkiełek





Rys. 3

$W = (8,7 \pm 0,1)$  cm. Korzystając z uzyskanych wyników obliczono wartość oraz niepewność pomiarową średnicy  $d = (0,61 \pm 0,04)$  mm.

Pomiary elektryczne wykonano w układzie pomiarowym zestawionym według schematu przedstawionego na rys. 2. Końcówki napięciowe sporządzono, wybierając z odizolowanych końców przewodów elektrycznych po jednym druciku. Pozwoliło to zminimalizować siłę wywieraną na wkład podczas pomiarów. Wkład z podłączonymi przewodami doprowadzającymi prąd umieszczono na papierze milimetrowym. Przewody doprowadzające prąd zostały dociśnięte do stołu za pomocą linijki, dzięki czemu wartość prądu w obwodzie nie zmieniała się

podczas pomiarów i wynosiła  $I = (150 \pm 1)$  mA. Wartości napięć  $U$  uzyskane dla różnych odległości  $L$  pomiędzy kontaktami napięciowymi przedstawiono na rys. 3. Warto zwrócić uwagę, że na wykresie nie umieszczono punktu odpowiadającego odległości  $L = 0$ , którą ze względu na skończone rozmiary kontaktów trudno uzyskać w doświadczeniu. Zgodnie z oczekiwaniami punkty pomiarowe przedstawione na rys. 3 układają się na prostej. Z dopasowania otrzymano wartość współczynnika kierunkowego  $a = (4,9 \pm 0,3)$  mV/mm. Po podstawieniu danych liczbowych uzyskano

$$\rho = \frac{\pi d^2}{4l} a = (9,6 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}.$$

Otrzymanie poprawnego wyniku zależy w dużym stopniu od staranności wykonania pomiarów. Szczególnie ważne jest, aby kontakty prądowe były na tyle mocno zaciśnięte, żeby wykonywanie pomiarów napięcia nie zmieniało wartości prądu płynącego w obwodzie. Duży wpływ na niepewność pomiarową oporności  $\rho$  ma niepewność wyznaczenia średnicy wkładu.

#### Autorzy:

zadania teoretyczne – mgr **Andrzej Dragan**;  
zadania doświadczalne – dr **Andrzej Wysmołek**.  
Obaj z KGOF i Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.



## GRATULUJEMY!

*pierwszej zwyciężczyni  
w historii Olimpiady Fizycznej*

## Magdalenie Gulewicz,

uczennicy IV klasy V Liceum Ogólnokształcącego  
im. ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie  
oraz  
wszystkim laureatom LIII Olimpiady.

Tradycyjnie, listę laureatów podamy razem  
z zadaniami III etapu, czyli w następnym  
zeszycie czasopisma.

*Redakcja*