LIII OLIMPIADA FIZYCZNA (2003/2004). Stopień III, zadanie teoretyczne – T3.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Jacek Jasiak, Andrzej Wysmolek: Fizyka w Szkole nr 4, 2004.

Nazwa zadania: Ramka unosząca się nad nadprzewodnikiem.

Działy: Magnetyzm

Słowa kluczowe: Indukcja magnetyczna, nadprzewodnik, przewód, prąd, pole magnetyczne, zasada superpozycji.

Zadanie teoretyczne – T3, zawody III stopnia, LIII OF.

Wektor indukcji magnetycznej $\vec{B}$ tuż nad powierzchnią nadprzewodnika jest zawsze styczny do tej powierzchni.

a) Korzystając z tego faktu, oblicz siłę działającą na jednostkę długości nieskończenie długiego, cienkiego, prostoliniowego przewodu znajdującego się w odległości d od płaszczyzny nadprzewodnika. Wyznacz pole $\vec{B}$ tuż nad nadprzewodnikiem. W przewodzie płynie prąd o natężeniu *I*.

b) Rozważmy wykonaną z przewodnika, prostokątną ramkę o wymiarach *a* x *b*, przy czym $a \gg b$, w której płynie ustalony prąd o nieznanym natężeniu. Masa ramki jest równa *m*. Przewodnik jest cienki. Sprawdzono, że gdy ramka ustawiona jest tak, że jej krótsze boki są pionowe, to unosi się (lewituje) nad poziomą, nadprzewodzącą płaszczyzną na wysokość $d_\perp$ liczonej do środka ramki, przy czym $a \gg d_\perp \gg b$. Czy ramka będzie się unosić również w przypadku, gdy jej płaszczyzna będzie równoległa do powierzchni nadprzewodnika? Jeśli tak to na jakiej wysokości $d_\parallel$? Przyspieszenie grawitacyjne jest równe *g*.

Rozwiązanie

a) Przyjmijmy, że powierzchnia nadprzewodnika jest określona równaniem $y = 0$, przewodnik określają równania $y = d$ i $x = 0$, a prąd płynie w nim zgodnie z wektorem $\vec{e}_z$. Pole $\vec{B}$ dla $y > 0$ jest suma pól pochodzących od prądu płynącego w naszym drucie i prądów wyidukowanych w nadprzewodniku. Zakładamy, że dla $y > 0$ pole magnetyczne pochodzące od prądów wyidukowanych w nadprzewodniku jest równe polu pochodzącemu od przewodnika o równaniach $y = -d', x = 0$ w którym płynie prąd I' zgodnie z wektorem $\vec{e}_z$. Łącznie mamy

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}[-\frac{y-d}{(y-d)^2+x^2}, \frac{x}{(y-d)^2+x^2}, 0] + \frac{\mu_0 I'}{2\pi}[-\frac{y+d'}{(y+d')^2+x^2}, \frac{x}{(y+d')^2}, 0],$$

gdzie wykorzystaliśmy wzór na indukcje magnetyczną pola nieskończonego, prostoliniowego przewodu. Tuż nad powierzchnia nadprzewodnika $("y = 0^+")$ dostajemy

$$\vec{B}(x, y = 0^+, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}[-\frac{-d}{d^2+x^2}, \frac{x}{d^2+x^2}, 0] + \frac{\mu_0 I'}{2\pi}[-\frac{d'}{d'^2+x^2}, \frac{x}{d'^2+x^2}, 0].$$

Aby spełnić warunek brzegowy, musimy przyjąć $d' = d, I' = -1$. Otrzymujemy wtedy

$$\vec{B}(x, y=0^+, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}[\frac{2d}{d^2+x^2}, 0, 0].$$

Siła działająca na nasz przewód przechodzi od pola magnetycznego wytworzonego przez przewód - obraz i zgodnie ze znanym wzorem jest równa (na jednostkę długości)

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}\vec{e_y} .$$

Nasz przewód jest odpychany od przewodnika.

b) Korzystając z zasady superpozycji i wyników punktu a) otrzymujemy, że pole magnetyczne nad nadprzewodnikiem jest suma pola magnetycznego naszej ramki i ramki - obrazu, będącej odbiciem rzeczywistej ramki względem płaszczyzny nadprzewodnika z zamianą prądu I płynącego w ramce na $-I$. Zatem siła działająca na ramkę jest siłą pochodząca od ramki - obrazu. Jeśli wysokość y ramki nad nadprzewodnikiem spełnia warunek $a \rangle\rangle\ y \rangle\rangle\ b$, to możemy przyjąć, że pole magnetyczne od ramki obrazu jest polem od dwóch nieskończonych, równoległych przewodników z prądem I i $-I$. Przyjmijmy, że nadprzewodnik leży w płaszczyźnie $y = 0$ i że dłuższe boki ramki są określone ramionami

$$x = x_1, y = y_1, -\frac{a}{2} \le z \le \frac{a}{2} \text{ oraz } x = -x_1, y = y_2,\ -\frac{a}{2} \le z \le \frac{a}{2}.$$

Siły działające na te boki będą równe

$$\vec{F_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a[0 - \frac{2x_1}{(2x_1)^2+(y_1+y_2)^2}, \frac{2y_1}{(2y_1)^2} - \frac{y_{1+y_2}}{(2y_1)^2+(y_1+y_2)^2}, 0],$$

$$\vec{F_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a[0 + \frac{2x_1}{(2x_1)^2+(y_1+y_2)^2}, \frac{2y_2}{(2y_2)^2} - \frac{y_1+y_2}{(2x_1)^2+(y_1+y_2)^2}, 0].$$

Ponieważ $a \langle\langle\ b$, siły pochodzące od krótszych boków pomijamy.

Suma sił $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$, dla ramki równoległej do nadprzewodnika $(x_1 = \frac{b}{2}, y_1 = y_2 = y)$, jest równa

$$\vec{F_\parallel} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_2 a\,[0,\ 2\frac{2y}{(2y)^2} - 2\frac{2y}{b^2+(2y)^2}, 0] \approx \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a\,[0, \frac{b^2}{4y^3}, 0].$$

Dla ramki prostopadłej do nadprzewodnika $(x_1 = 0, y_1 = y + \frac{b}{2}, y_2 = y - \frac{b}{2})$

$$\vec{F_\perp} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a\,[0, \frac{2y+b}{(2y+b)^2} + \frac{2y-b}{(2y-b)^2} - \frac{4y}{(2y)^2}, 0] \approx \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a\,[0, \frac{b^2}{4y^3}, 0],$$

czyli w obu przypadkach siła jest taka sama! Oznacza to, że w obu przypadkach ramka będzie się unosiła na tej samej wysokości nad nadprzewodnikiem, czyli $d_\parallel = d_\perp$.