Zadanie D2

Zadanie można rozwiązać mierząc okres drgań kulki stalowej zawieszonej na nici. Pomiar należy przeprowadzić dla dwóch przypadków: 1) kula poruszająca się w powietrzu oraz 2) kula poruszająca się w wodzie.

W pierwszym przypadku okres drgań tak sporządzonego wahadła wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{1}$$

gdzie l jest odległością od punktu zawieszenia nici do środka kuli, a g przyspieszeniem ziemskim.

W obliczeniach dla kulki zanurzonej w wodzie należy zwiększyć masę bezwładną o masę dołączoną i uwzględnić siłę wyporu wody. Dla małych wychyleń x, po zaniedbaniu tłumienia, prowadzi to do równania ruchu:

$$(\rho_s V + m_d)a = -\frac{gV}{l}(\rho_s - \rho_{wody})x \tag{2}$$

gdzie ρ_s i ρ_{wody} oznacza gęstości stali i wody, a V objętość kulki. Rozwiązaniem równania są drgania harmoniczne z okresem:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{\rho_s + m_d/V}{\rho_s - \rho_{wody}}}\,. \tag{3}$$

Pomiar obu okresów T oraz T' pozwala wyznaczyć masę dołączoną dla kuli:

$$m_d = V\left[\left(\frac{T'}{T}\right)^2\left(\rho_s - \rho_{wody}\right) - \rho_s\right], \tag{4}$$

Stąd wyznaczamy szukany stosunek mas:

$$\frac{m_d}{m_w} = \left(\frac{T'}{T}\right)^2\left(\frac{\rho_s}{\rho_{wody}} - 1\right) - \frac{\rho_s}{\rho_{wody}} \tag{5}$$

Pomiary wykonano dla kulki stalowej o masie 131g i średnicy1,6cm, co odpowiada gęstości ρ_s = 7,63 g/cm^3. Kulkę zawieszono na nitce i zmierzono stoperem czas 10 pełnych drgań w powietrzu i w wodzie dla trzech różnych długości nitki.

Otrzymano następujące wyniki:

Pomiar	*T*	*T'*	*T'/T*
1	2,22s	2,33s	1,103
2	2,62s	2,89s	1,104
3	1,54s	1,69s	1,099

Średni stosunek okresów jest równy T'/T=1,102±0,003, co daje wielkość masy dołączonej m_d=V (0,44±0,04) g/cm^3. Wynikający stąd stosunek masy dołączonej kuli do masy wypartej przez nią wody wynosi $\frac{m_d}{m_w} = 0{,}44 \pm 0{,}04$.

W rozwiązaniu zadania założono, że wpływ tłumienia na zmianę częstości drgań kuli w wodzie można pominąć. Założenie to można zweryfikować doświadczalnie badając zmianę amplitudy drgań wahadła zanurzonego w wodzie z upływem czasu. Pomiar amplitudy można wykonać przy pomocy linijki. Z pomiarów wykonanych przez recenzenta wynika, że zmiana

częstotliwości wywołana przez tłumienie jest mniejsza niż 1%, co w pełni uzasadnia pominięcie jej w rozwiązaniu zadania.*
Uzyskanie poprawnego wyniku zależy w dużej mierze od staranności wykonania doświadczenia. Należy zadbać, aby kula poruszała się w wodzie możliwie daleko od dna, ścianek naczynia (wanny) oraz powierzchni wody. Dla zwiększenia dokładności pomiaru okresu drgań, wahadło powinno być możliwie długie. Jednocześnie umożliwia to badanie ruchu dla małych wychyleń (kątowych) wahadła przy stosunkowo dużych amplitudach liniowych.

Proponowana punktacja:

1) Pomysł doświadczenia z wahadłem poruszającym się w powietrzu i w wodzie. — do 3pkt.
2) Wyprowadzenie związku (5) — do 6 pkt.
3) Sprawdzenie doświadczalne założenia o słabym tłumieniu — do 2 pkt.
4) Wykonanie pomiarów okresu drgań wahadła w powietrzu i w wodzie dla kilku długości wahadła lub kilku amplitud wychylenia — do 6 pkt.
5) Poprawny wynik wraz z dyskusją źródeł niepewności pomiarowych. — do 2 pkt.

*** Komentarz**

Zgodnie z teorią wahadła słabo tłumionego jego amplituda zanika w czasie wykładniczo:

$$A(t) = A(t_0)e^{-t\gamma},$$

gdzie, γ - parametr tłumienia. Częstotliwość drgań układu słabo tłumionego opisuje się wzorem:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}},$$

gdzie ω_0 – częstotliwość drgań wahadła nietłumionego. Wyznaczając częstotliwość drgań ω oraz tłumienie γ możemy wyznaczyć częstotliwość układu nietłumionego ω_0:

$$\omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}} \cong \omega\left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)$$