XLVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1998/1999). Stopień III, zadanie doświadczalne – D

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej – A. Wysmołek; *Fizyka w Szkole* nr 1, 2000.

Autor: Andrzej Wysmołek – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej, IFD UW.

Nazwa zadania: Badanie własności sprężyny

Działy: Mechanika

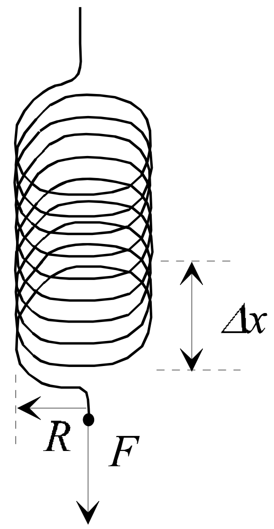
Słowa kluczowe: sprężyna, siła rozciągająca, moduł sztywności, analiza wymiarowa, wydłużenie sprężyny, rozciągnięcie, drut

Zadanie doświadczalne – D, zawody III stopnia, XLVIII OF.

Rozważmy cylindryczną sprężynę o promieniu *R* (Rys. 1), wykonaną z drutu o promieniu *r*. W przypadku gdy ograniczymy się do odkształceń idealnie sprężystych drutu, zachodzi liniowa zależność między siłą rozciągającą *F* a wydłużeniem sprężyny Δx, co można zapisać w postaci:

$$F = \tfrac{1}{4} r^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma} n^{\delta} \Delta x ,$$

gdzie α, β, γ, δ – pewne (bezwymiarowe) liczby całkowite, *n* – liczba zwojów sprężyny, *R* – promień sprężyny, *G* – moduł sztywności materiału, z którego wykonany jest drut.



Rys. 1.

Masz do dyspozycji drut miedziany o znanej średnicy, linijkę, obciążnik o znanej masie, statyw i kartkę papieru, którą można wykorzystać do nawinięcia sprężyny. Wyznacz wartości stałych α, β, γ, δ oraz moduł sztywności miedzi wyrażony w N/m^2.

Uwagi

1. Zaniedbaj wpływ lakieru, którym pokryty jest drut na jego własności sprężyste.
2. Sprężyna powinna posiadać co najmniej 10 zwojów.
3. Odległość między zwojami sprężyny powinna być znacznie mniejsza od jej promienia *R*.

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Współczynników α, β, γ można wyznaczyć korzystając z analizy wymiarowej. Należy w tym celu porównać wymiary po obu stronach równania

$$F = \tfrac{1}{4} r^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma} n^{\delta} \Delta x \,, \tag{1}$$

Biorąc pod uwagę, że liczba zwojów *n* jest wielkością bezwymiarową, $[r] = [R] = [\Delta x] = (\mathrm{m})$, $[G] = (\mathrm{N/m^2})$ dostajemy związek:

$$\mathrm{N}^1 = (\mathrm{m})^{\alpha} (\mathrm{m})^{\beta} (\mathrm{N/m^2})^{\gamma} (\mathrm{m})^1. \tag{2}$$

Przyrównując wykładniki stojące przy metrach i niutonach otrzymujemy

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta - 2\gamma + 1 = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

skąd po przekształceniu mamy

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases}. \tag{4}$$

Ponieważ analiza wymiarowa nie daje informacji o wykładniku δ, należy go wyznaczyć inaczej. Można rozumować w następujący sposób. Zgodnie, ze wzorem (1) sprężyna rozciągana siłą *F* wydłuży się Δx. W przypadku, gdy połączymy dwie takie sprężyny, jedna za drugą, to wydłużenie spowodowane siłą *F* wyniesie $2\Delta x$. Taki układ możemy traktować jak sprężynę o $2n$ zwojach:

$$F = \tfrac{1}{4} r^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma} (2N)^{\delta} (2\Delta x), \tag{5}$$

skąd po skorzystaniu z wyrażenia (1) dostajemy (dla $N \neq 0$):

$$1 = (2)^{\delta} 2 \,, \tag{6}$$

skąd $\delta = -1$. Do tego samego wniosku można dojść rozważając połączenie „równoległe” dwóch identycznych sprężyn. Wtedy wydłużenie obu sprężyn będzie również identyczne, natomiast siła rozciągająca rozdziela się po połowie na każdą ze sprężyn.

Stałą δ można wyznaczyć również doświadczalnie badając zależność wydłużenia sprężyny od liczby jej zwojów *n*. W tym celu na sprężynie zawieszać można obciążnik o masie *m*. Przekształcając wzór (1) mamy:

$$n^{-\delta} = \frac{r^{\alpha} G R^{\beta}}{4mg} \Delta x \,, \tag{7}$$

co można zapisać w postaci:

$$\log n = -\frac{1}{\delta} \log \Delta x - \frac{1}{\delta} \log\left(\frac{r^{\alpha} G R^{\beta}}{4mg} \right). \tag{8}$$

Tak więc wartość wykładnika δ jest określona przez nachylenie prostej opisanej równaniem (8).

W podobny sposób możemy wyznaczyć wartość współczynnika β. Ponieważ w zestawie doświadczalnym dostępny jest tylko jeden rodzaj drutu, to narzucającym się pomysłem jest badanie wydłużenia sprężyn o różnych promieniach *R*, wywołanego zawieszeniem obciążnika o masie *m*. Z przekształcenia równania (1) mamy:

$$R^{-\beta} = \frac{r^{\alpha}G}{4mg}\frac{\Delta x}{n}, \tag{9}$$

co można zapisać w postaci

$$\log R = -\frac{1}{\beta}\log(\frac{\Delta x}{n}) - \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{r^{\alpha}G}{4mg}\right) = A\log(\frac{\Delta x}{n}) + B, \tag{10}$$

gdzie $A = -\frac{1}{\beta}$, $B = -\frac{1}{\beta}\log\left(\frac{r^{\alpha}G}{4mg}\right)$.

Tak więc stała β jest określona przez współczynnik nachylenia prostej opisanej równaniem (10). Znając β możemy wyznaczyć stałą $\alpha = 1 - \beta$. Określenie parametru *B* prostej opisanej równaniem (10) pozwala wyznaczyć wartość modułu sztywności

$$G = \frac{4mg}{r^{\alpha}}10^{-\beta B} \tag{11}$$

Część doświadczalna

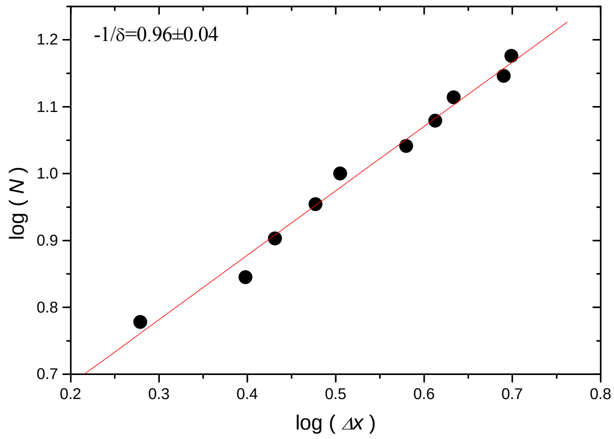
Podstawową trudnością w rozwiązaniu jest umiejętność „nawinięcia” z dostępnego drutu sprężyny. Sprężyny o różnych promieniach *R*, można nawijać przy użyciu papieru kancelaryjnego zwiniętego w rulon. Należy zadbać o to aby zwoje sprężyny układały się możliwie blisko siebie. W celu wykonania pomiarów wydłużenia sprężyny konieczne jest zawieszanie sprężyny na statywie oraz ciężarka na sprężynie. Z tego powodu początkowa i końcowa część sprężyny musi być zdeformowana. Dlatego ważne jest aby nie badać wydłużenia całej sprężyny, a jedynie jej środkowy („równo nawinięty”) fragment, w którym promienie poszczególnych zwojów można uznać za identyczne. Zwykle pierwsze zawieszenie obciążnika wywołuje inną wartość wydłużenia niż każde następne. Wiąże się to z odkształceniami plastycznymi drutu powstającymi podczas nawijania sprężyny. Dlatego pomiary wydłużenia dla danej sprężyny należy kilkakrotnie powtórzyć, sprawdzając, czy po zdjęciu obciążnika sprężyna wraca do stanu wyjściowego. Pomiar promienia *R* należy wykonać po wykonaniu pomiarów jej wydłużenia *R* (po zdjęciu sprężyny z papierowego rulonu jej promień zwiększa się i nieznacznie maleje po pierwszym zawieszeniu na niej obciążnika)

W przypadku gdy decydujemy się na wyznaczenie stałej δ doświadczalnie, należy nawinąć sprężynę o kilkunastu (*n*) zwojach, a następnie wykonywać pomiary wydłużenia, skracając ją o kolejne zwoje. Przykładowe wyniki dla sprężyny o promieniu *R* = (16 ± 1) mm umieszczone zostały w Tabeli 1.

Tabela 1

N	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Δh, cm ± 0.2 cm	1.9	2.5	2.7	3.0	3.2	3.8	4.1	4.3	4.9	5.0

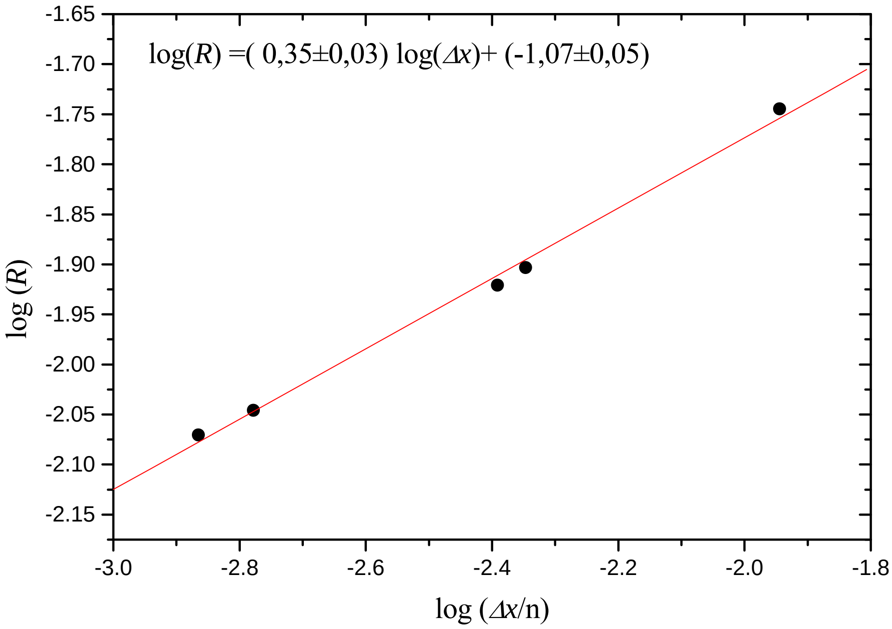
Wykres zależności log (*n*) od log (Δx) przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2.

Z dopasowania prostej otrzymano $\delta = (-1{,}04 \pm 0{,}05)$. Ponieważ nasze rozwiązanie ograniczamy do wartości całkowitych to przyjmujemy, że $\delta = -1$.

W celu wyznaczenia zależności wydłużenia Δx od promienia R badano sprężyny o $N = 15$ zwojach. Wyniki eksperymentalne przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3.

Z dopasowania prostej otrzymano $\beta = (-3{,}0 \pm 0{,}1)$. W efekcie więc $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$, $\delta = -1$, a więc wzór (1) przyjmie postać:

$$F = \frac{r^4 G}{4R^3 N}\Delta x\,.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzoru (11) dostajemy $G = (5{,}7 \pm 1{,}5)\cdot 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$.

Bardzo znaczący wpływ na wynik pomiaru ma staranne wykonanie sprężyny. Należy zadbać też o to aby zwoje sprężyny były „równe" i aby odległość między nimi była znacznie mniejsza od promienia sprężyny R. Duży błąd wyznaczenia G związany jest przede wszystkim z niedokładnością wyznaczenia średnicy drutu (zależność potęgowa). Znaczący wpływ na uzyskany wynik ma też dokładność pomiaru wydłużenia sprężyny.

Proponowana punktacja

1. Wyznaczenie γ oraz związku między α i β — do 4 pkt.
2. Wyznaczenie stałej δ (rozważania teoretyczne lub na podstawie badania doświadczalnego sprężyny ze zmienną liczbą zwojów) — do 3 pkt.
3. Pomysł badania sprężyn o różnych promieniach prowadzący do wyznaczenia stałych β oraz α — do 3 pkt.
4. Wykonanie pomiarów wydłużenia sprężyn o różnych promieniach — do 5 pkt.
5. Sporządzenie poprawnego wykresu i dopasowanie prostej — do 3 pkt.
6. Wyznaczenie wartości stałych α, β oraz modułu sztywności miedzi *G* wraz z analizą niepewności pomiarowych — do 2 pkt.