

XLVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1998/1999). Stopień II, zadanie doświadczalne – D

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej – A. Wysmołek; *Fizyka w Szkole* nr 4, 1998.

Autor: Andrzej Wysmołek – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej, IFD UW.

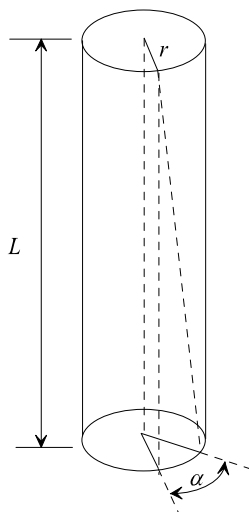
Nazwa zadania: Wyznaczanie modułu sztywności miedzi.

Działy: Mechanika, mechanika bryły sztywnej.

Słowa kluczowe: moment siły, bezwładności, moduł sztywności, zasady dynamiki, skręcenie, wahadło, okres drgań, drgania harmoniczne, torsyjne, pręt, stoper.

Zadanie doświadczalne – D, zawody II stopnia, XLVIII OF.

Rozważmy jednorodny pręt o przekroju kołowym, którego jeden koniec jest unieruchomiony, a drugi skręcony o kąt α pod wpływem momentu siły M (rys. 1).



Rys. 1.

W przypadku, gdy ograniczymy się do rozważań idealnie sprężystych odkształceń pręta, związek między momentem siły M a kątem skręcenia α można zapisać w postaci

$$M = \frac{\pi G r^4}{2L} \alpha,$$

gdzie G – moduł sztywności materiału z jakiego wykonany jest pręt, r – promień pręta, L – długość pręta.

Mając do dyspozycji: drut miedziany o znanej średnicy, ołówek, zegarek z sekundnikiem lub stoper, linijkę, ciężarek o znanej masie i statyw wyznacz moduł sztywności miedzi.

Uwagi:

1. Zaniedbaj wpływ lakieru, którym pokryty jest drut na jego własności sprężyste.
2. Przyjmij, że dla ołówka moment bezwładności względem osi prostopadłej do ołówka i przechodzącej przez jego środek wynosi

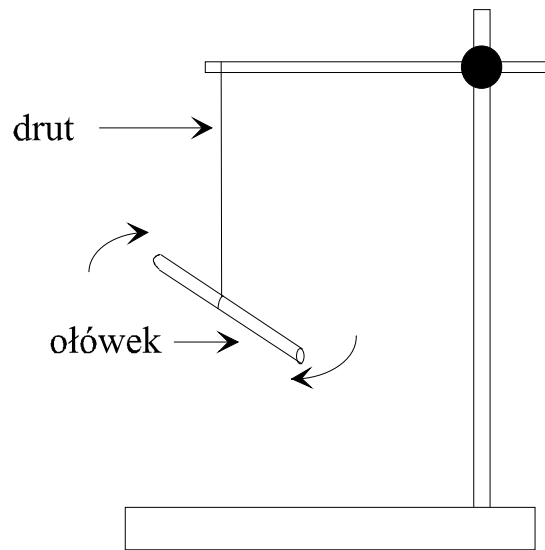
$$I = 1/12 m d^2,$$

gdzie m – masa ołówka, d – długość ołówka.

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Zadanie można rozwiązać mierząc okres drgań torsyjnych ołówka zawieszonoego na drucie miedzianym (rys.2).



Rys. 2.

Korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego dostajemy równanie:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\pi Gr^2}{2L} \alpha \quad (1)$$

Opisuje ono drgania harmoniczne o okresie

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2IL}{\pi Gr^4}} = \sqrt{\frac{8\pi IL}{Gr^4}}, \quad (2)$$

gdzie I – moment bezwładności ołówka, L – długość drutu, r – promień drutu, G – moduł sztywności miedzi. Po wyrażeniu momentu bezwładności ołówka przez jego masę i długość, z przekształcenia wyrażenia (2) dostajemy:

$$G = \frac{2}{3} \frac{\pi m d^2}{r^4} \frac{L}{T^2} \quad (3)$$

Średnica drutu miedzianego jest znana i w przypadku doświadczeń wykonanych przez recenzenta wynosiła $2r = (0,12 \pm 0,01)$ mm, długość drutu oraz długość ołówka można zmierzyć linijką, a okres drgań stoperem.

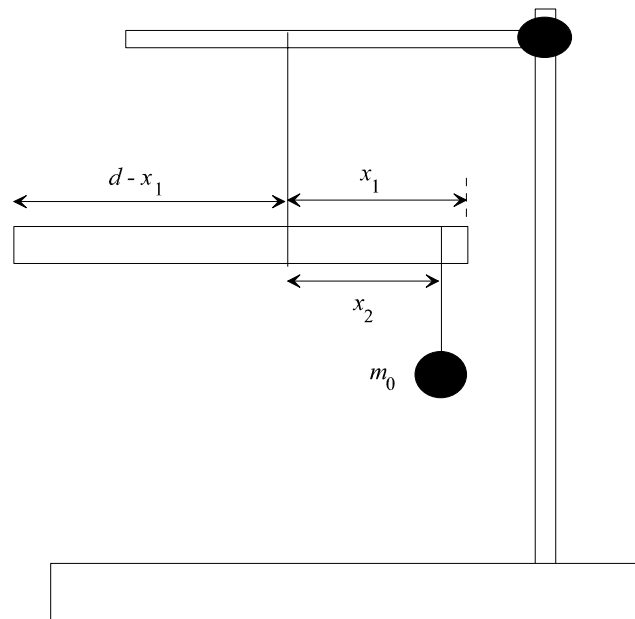
W celu obliczenia modułu sztywności G trzeba jeszcze znać masę ołówka m . Można ją wyznaczyć na różne sposoby, np. budując „wagę” złożoną z ołówka i obciążnika o znanej masie (rys. 3).

Zmieniając miejsce zawieszenia ołówka i obciążnika o znanej masie można doprowadzić do zrównowżenia układu przedstawionego na rys. 3. Elementy ołówka odległe o x_1 od punktu zawieszenia równoważą się, zatem ciężar obciążnika równoważony jest przez część ołówka o długości $L - 2x_1$, której środek masy znajduje się w odległości $(d - x_1 + x_1)/2 = d/2$ od punktu zawieszenia ołówka. Prowadzi to do równania:

$$\frac{d}{2} (L - 2x_1) \frac{m}{d} - x_2 m_0 = 0, \quad (4)$$

skąd szukana masa ołówka

$$m = \frac{2x_2}{d - 2x_1} m_0. \quad (5)$$



Rys. 3.

Część doświadczalna

W doświadczeniu wykonanym przez recenzenta wykorzystano ołówek, którego długość zmierzona linijką wyniosła $d = (12,0 \pm 0,1)$ cm. Użyty do pomiarów obciążnik miał masę $m_0 = (3,00 \pm 0,05)$ g.

Żeby zamocować ołówek na statywie, należy wykonać pętelkę z kilku zwojów drutu. Należy to zrobić tak, aby można było ją przesuwać wzdłuż ołówka. Podczas drgań pętelka nie powinna się przesuwać. Pomiaru okresu drgań torsyjnych ołówka powtarzano pięciokrotnie dla kilku długości drutu. Przykładowe wyniki zebrano w tabeli i naniesiono na wykres (rys. 4).

Tabela

Długość drutu L , cm	$10,0 \pm 0,2$	$17,0 \pm 0,2$	$26,5 \pm 0,2$	$32 \pm 0,2$	$39,5 \pm 0,2$	$51,0 \pm 0,2$
Okres drgań T , s	$4,0 \pm 0,1$	$5,2 \pm 0,1$	$6,8 \pm 0,1$	$7,2 \pm 0,2$	$7,9 \pm 0,1$	$8,9 \pm 0,1$

Współczynnik nachylenia prostej przedstawionej na rys. 4 określa średnią wartość wyrażenia $(L/T^2)_{\text{sr}} = (0,63 \pm 0,02)$ cm/s².

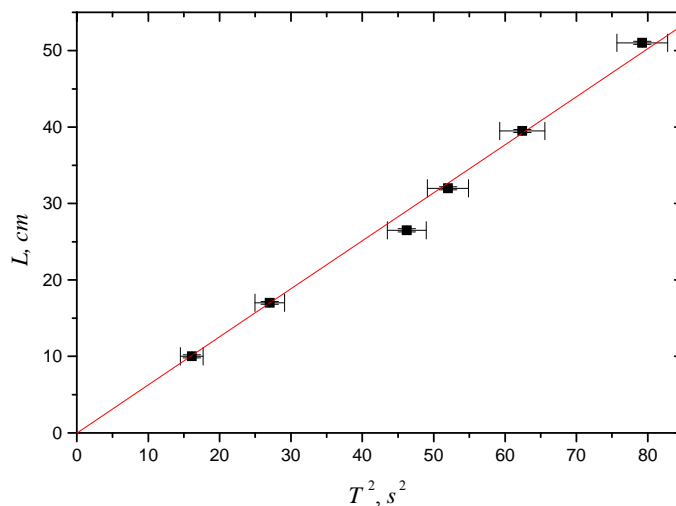
Pomiary masy ołówka wykonano kilkakrotnie zawieszając obciążnik w pobliżu jednego z końców ołówka. Na tej podstawie określono masę ołówka $m = (3,4 \pm 0,1)$ g. Dla zrównoważenia ciężaru drutu użytego do podwieszenia obciążnika na drugim ramieniu „wagi” można zawiesić taki sam kawałek drutu.

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzoru (3) uzyskano wartość momentu sztywności miedzi $G = 4,9 \cdot 10^{10}$ N/m².

Dla oszacowania niepewności pomiarowej otrzymanego wyniku można skorzystać ze wzoru na odchylenie standardowe wielkości złożonej:

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(L/T^2)}{L/T^2}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta r}{r}\right)^2} = 0,01\sqrt{9+3+9+1111} = 0,33$$

Wynika z niego, że główny wkład w niepewność pomiarową pochodzi od dokładności wyznaczenia promienia drutu. W przypadku, gdyby promień drutu nie był obciążony niepewnością pomiarową, niepewność pomiarowa wyznaczenia G stanowiłby ok. 5% jego wartości. Ostatecznie $G = (4,9 \pm 1,5) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. Z dokładnością do niepewności pomiarowej jest to wynik zgodny z danymi podawanymi w tablicach fizycznych, które mieszczą się w przedziale $(4,0 \div 4,8) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.



Rys. 4.

Punktacja

Część teoretyczna

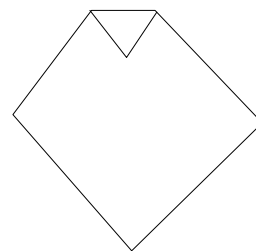
1. Powiązanie modułu sztywności z okresem wahadła torsyjnego do 4 pkt.
2. Metoda wyznaczenia masy ołówka do 4 pkt.

Część doświadczalna

3. Wyznaczenie wartości L/T^2 (pomiary, rysunek, dopasowanie prostej) do 5 pkt.
4. Wyznaczenie masy ołówka do 4 pkt.
5. Wyznaczenie wartości modułu sztywności miedzi oraz analiza niepewności pomiarowych do 3 pkt.

Wskazówki dla organizatorów

1. Jako obciążnika można użyć np. kawałka blaszki z wygiętym rogiem (rys. 5). Do obciążnika należy dołączyć informację o jego masie. Powinna ona być zbliżona do masy ołówka (z tolerancją 5%).
2. Średnica drutu powinna się mieścić w granicach od 0,1 do 0,2 mm. Należy ją dobrać tak, aby okres drgań torsyjnych ołówka na drucie długości 0,5 m nie przekraczał 15 s. Średnicę drutu z dokładnością pomiarową 0,01 mm należy podać na kartce dołączonej do drutu. Każdy zawodnik powinien otrzymać około 1,5 m drutu.
3. W każdej sali powinny znajdować się nożyczki lub nóż do cięcia drutu.
4. Statyw powinien umożliwić zawieszenie drutu na wysokości większej niż 60 cm.



Rys. 5.