XLVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1998/1999). Stopień I, zadanie doświadczalne – D3

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej – A. Wysmołek; *Fizyka w Szkole* nr 3, 1999.

Autor: Andrzej Wysmołek – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej, IFD UW.

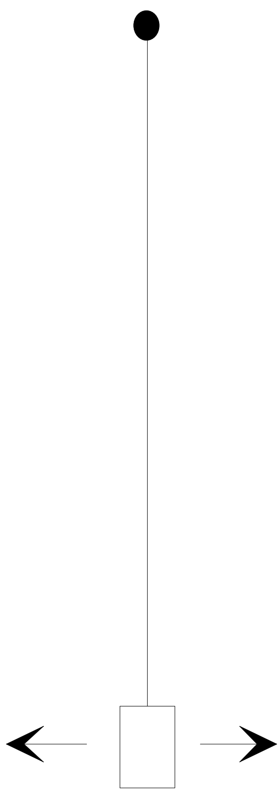
Nazwa zadania: Badanie zależności amplitudy drgań od czasu dla wahadła

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: wahadło, okres drgań, amplituda, siła, opór aerodynamiczny, prędkość chwilowa,

Zadanie doświadczalne – D3, **zawody I stopnia cz. 2, XLVIII OF**.

Masz do dyspozycji zegarek z sekundnikiem lub stoper, przybory do pisania, kilka arkuszy papieru, walcowy pojemnik po filmie małoobrazkowym, plastelinę, nici, statyw lub zaczep umożliwiający zamocowanie nitki na odpowiedniej wysokości. Wykorzystując nitkę i pojemnik wypełniony plasteliną zbuduj wahadło (rys. 1). Zbadaj zależność amplitudy jego drgań od czasu. Sprawdź doświadczalnie czy otrzymane wyniki można opisać przy założeniu, że siła oporu aerodynamicznego działająca na poruszający się pojemnik jest wprost proporcjonalna do jego prędkości chwilowej.



Rys. 1

Rozwiązanie

Po wprawieniu wahadła w ruch, amplituda jego drgań będzie się zmniejszać w wyniku działania sił oporu aerodynamicznego. Można uznać, że dla niewielkich amplitud, okres drgań wahadła nie zależy od amplitudy i wychylenie wahadła zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t)$, gdzie φ_0 - maksymalne wychylenie wahadła, t - czas, ω - częstość drgań. Przy takich założeniach praca W sił oporu po okresie T drgań wahadła wyniesie:

$$W = \int_{-T/2}^{T/2} F_{op} \upsilon dt = \int_{-T/2}^{T/2} \alpha \upsilon \upsilon dt = 2\int_{0}^{T/2} \alpha \upsilon \upsilon dt = 2\int_{0}^{\pi/\omega} \alpha L^2 \varphi_o^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) dt \qquad (1)$$

przy czym L oznacza długość wahadła, α – pewna stała.

Przy założeniu, że maksymalne wychylenie φ_0 nie zmienia się znacząco w czasie T (przypadek słabego tłumienia) wyrażenie (1) można zapisać w postaci:

$$W \cong 2\alpha L^2 \varphi_0^2 \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = C\varphi_o^2, \qquad (2)$$

gdzie C - pewna stała. Do tego samego wyniku można dojść na drodze rozważań jakościowych, przyjmując siła oporu ma wartość, określoną przez maksymalną prędkość wahadła $\upsilon_{\max} \cong \sqrt{gL}\varphi_0$, tzn. $W \cong 2\alpha \upsilon_{\max} \varphi_0 = C' \varphi_o^2$.

Dla niewielkich wychyleń wahadła, jego energię całkowitą E można przedstawić w postaci

$$E = mgL(1 - \cos\varphi_0) \cong \frac{mgL}{2} \varphi_0^2 \qquad (3)$$

Gdy amplituda zmaleje o $\Delta\varphi$ energia osiągnie wartość

$$E' = (\varphi_0 - \Delta\varphi)^2 \frac{mgL}{2} \cong \varphi_0^2 \frac{mgL}{2} - \varphi_0 \Delta\varphi\, mgL = E - \varphi_0 \Delta\varphi\, mgL. \qquad (4)$$

Z drugiej strony mamy:

$$E' = E - W', \qquad (5)$$

gdzie W' oznacza pracę sił oporu. Jeśli zmianę amplitudy wahadła zmierzymy po pewnym czasie $\tau = nT$, gdzie n oznacza niewielką liczbą całkowitą, to $W' \cong nW = nC\varphi_0^2$. Z porównania wyrażeń (4) i (5) dostajemy:

$$nC\varphi_0^2 = \varphi_0 \Delta\varphi \qquad (6)$$

skąd

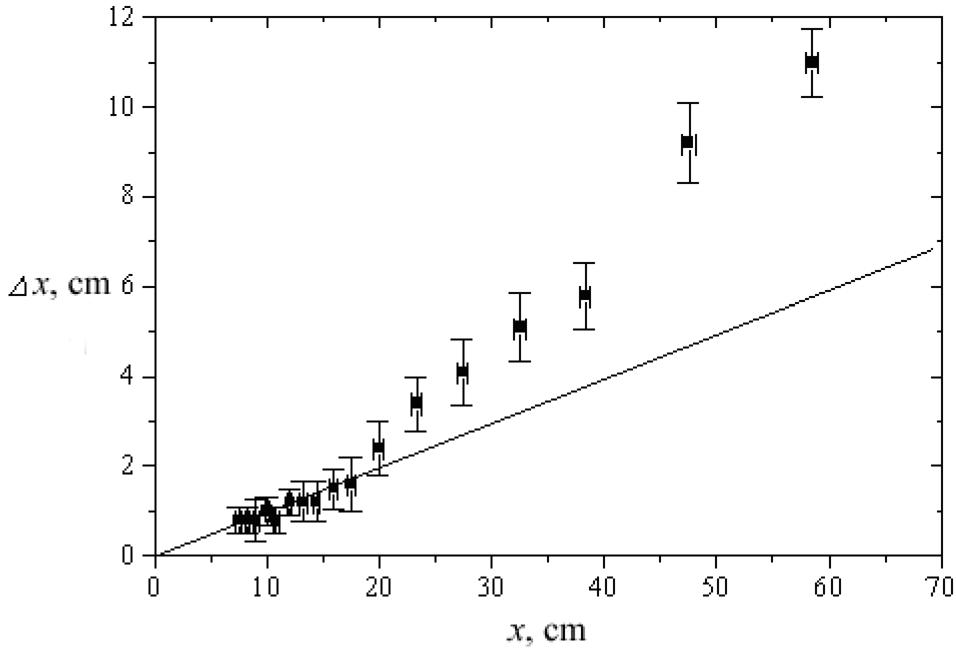
$$\Delta\varphi = A\varphi_0 \qquad (7)$$

gdzie A oznacza pewną stałą.

Tak więc, jeśli siła oporu aerodynamicznego jaka działa na pudełko jest wprost proporcjonalna do jego prędkości, to zmiana amplitudy wahadła powinna być wprost proporcjonalna do amplitudy. Jeśli ograniczyć pomiary do małych wychyleń wahadła, zamiast kąta φ_0 można mierzyć maksymalne odchylenie wahadła od pionu $x = L\sin\varphi_0 \cong L\varphi_0$. Wykorzystując ten związek, można zapisać równanie (7) w postaci:

$$\Delta x = Bx$$

przy czym: B – pewna stała, Δx - zmiana maksymalnego wychylenia wahadła. Po wprawieniu wahadła w ruch w stałych odstępach czasu τ (np. co dziesięć wahnięć) zaznaczamy maksymalne wychylenia na arkuszu papieru umieszczonym pod wahadłem. Odstęp czasu τ należy dobrać tak aby zmiana amplitudy Δx była niewielka w porównaniu z amplitudą. Doświadczenie powtarzamy kilka razy. Następnie sporządzamy wykres zależności Δx od x (rys. 2).



Rys. 2

Z rys. 2 wynika, że zmiana amplitudy drgań Δx nie jest wprost proporcjonalna do amplitudy x, a zatem uzyskanych rezultatów nie można wyjaśnić zakładając, że siła oporu aerodynamicznego działająca na poruszające się pudełko jest wprost proporcjonalna do jego prędkości.

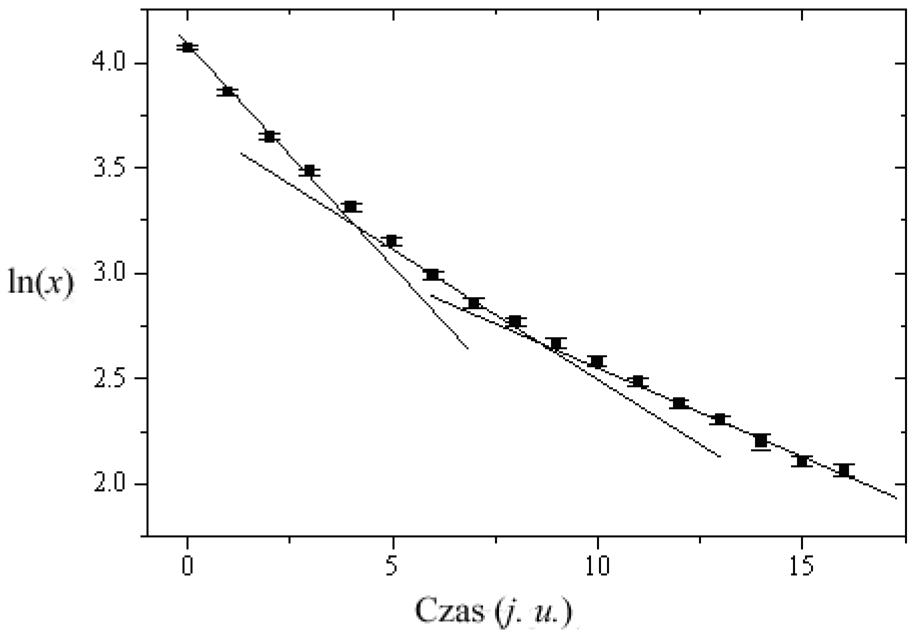
Inny sposób rozwiązania zadania polega na wykorzystaniu wiedzy o zależności amplitudy wahadła tłumionego od czasu. Odpowiednią formułę można znaleźć w podręcznikach akademickich lub „Encyklopedii fizyki". Dla wahadła tłumionego, w którym siły oporu są wprost proporcjonalne do prędkości jest to zależność wykładnicza:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \tag{9}$$

gdzie β oznacza pewną stałą dodatnią. Po zastąpieniu wielkości kątowych przez odchylenie wahadła od pionu x i przekształceniu zależności (9) dostajemy:

$$\ln x = -\beta t + \ln x_0 \tag{10}$$

Oznacza to, że w przypadku gdy siły oporu są wprost proporcjonalne do prędkości, logarytm amplitudy drgań powinien maleć liniowo z czasem. Wykres zależności amplitudy drgań dla wahadła wykonanego z pudełka po filmach małoobrazkowych przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3

Widać, że nie jest to zależność liniowa. Oznacza to, że otrzymanych wyników doświadczalnych nie można wyjaśnić zakładając, że siła oporu aerodynamicznego działająca na pojemnik po filmie jest wprost proporcjonalna do jego prędkości.

Proponowana punktacja

1. Wyprowadzenie związku (7) lub skorzystanie ze związku (9)	5 pkt.
2. Wykonanie pomiarów zależności wychylenia wahadła od czasu	8 pkt.
3. Opracowanie wyników pomiarowych (wykres, dopasowanie prostej)	5 pkt.
4. Poprawny wynik końcowy wraz z analizą błędów pomiarowych	2 pkt.