XLV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadania teoretyczne

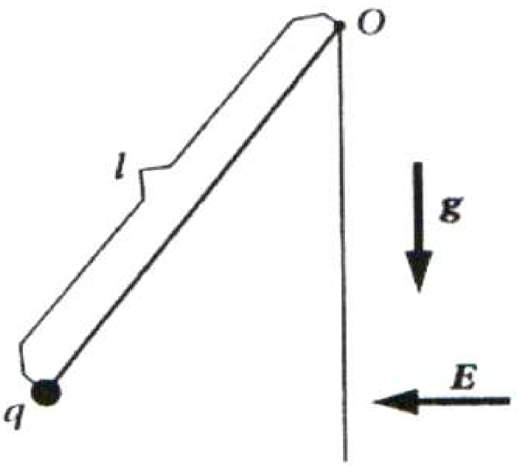
Rozwiąż dowolnie wybrane dwa z podanych niżej trzech zadań:

ZADANIE T1

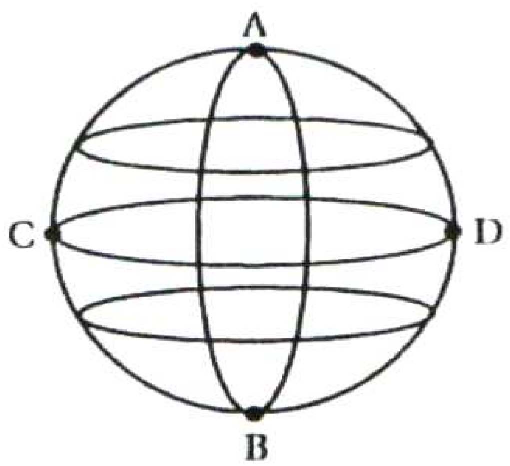
Nazwa zadania: „ Drgania pręta”

B. Na dolnym końcu sztywnego pręta o masie m i długości l znajduje się punktowy ładunek elektryczny q. Górny koniec pręta jest u mocowany w punkcie O, wokół którego pręt może się obracać swobodnie. Opisz małe drgania pręta w jednorodnym polu ciężkości o natężeniu g i jednorodnym, poziomo skierowanym polu elektrycznym o natężeniu E. Przyjmij, że ruch pręta odbywa się w płaszczyźnie rysunku 2. Tłumienie drgań zaniedbujemy.

Dane: $q = 10^{-6}\ C,\ E = 2{,}83 \cdot 10^{-3}\ N/C,\ m = 10^{-3}\ kg,\ g = 9{,}81\, m/s^2,\ l = 1\, m.$



rys. 2

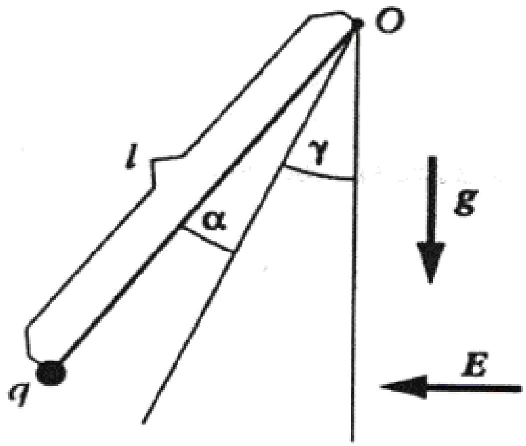


rys. 3

ROZWIĄZANIE

B. Z równowagi momentów sił względem punktu O otrzymujemy warunek

$$tg\gamma = \frac{2q \cdot E}{m \cdot g}. \qquad (4)$$



rys. 2

Odchylenia pręta od położenia równowagi, któremu odpowiada kąt $\gamma = 30^\circ$, będziemy oznaczać przez kąt α, rys. 2. Przyrost α zgodny z ruchem wskazówek zegara przyjmujemy za dodatni. Kierunek działania momentów sił jest prostopadły do natężenia $\boldsymbol{g}$ pola grawitacyjnego oraz natężenia $\boldsymbol{E}$ pola elektrycznego. Równanie ruchu pręta ma postać

$$M = I\varepsilon \tag{5}$$

gdzie M jest momentem sił działających na pręt względem O, I – momentem bezwładności pręta względem osi obrotu przechodzącej przez O oraz $\varepsilon = d^2\alpha / dt^2$ jest przyspieszeniem kątowym pręta. Dla wychylenia o kąt α (rys. 2) mamy

$$M = -[-qEl\cos(\alpha+\gamma) + \frac{1}{2}mgl\sin(\alpha+\gamma)] = -A\sin(\delta+\alpha+\gamma)\,, \tag{6}$$

gdzie

$$A = l\sqrt{(qE)^2 + \left(\frac{mg}{2}\right)^2}\ . \tag{7}$$

Kąt α zależy od czasu, zaś kąty δ i γ są stałe;

$$\sin\delta = -qEl / A, \cos\delta = mgl/(2A).$$

Zatem $tg\delta = -2qE/mg = -tg\gamma,$ czyli $\delta = \text{-}\gamma.$ Stąd mamy

$$M = -A\sin\alpha\,. \tag{8}$$

W przypadku małych drgań $(\alpha << 1)$ możemy stosować przybliżenie $\sin\alpha \approx \alpha$. Równanie ruchu (5) przyjmuje wtedy postać

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0\,, \tag{9}$$

gdzie $\omega^2 = A/I$. Uwzględniając dane zadania oraz $I = ml^2/3$ mamy

$$\omega^2 = 3\frac{\sqrt{(qE)^2 + \left(\frac{mg}{2}\right)^2}}{ml} \approx 17 s^{-1} \qquad (10)$$

Rozwiązaniem równania (6) jest $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \phi)$, gdzie $\omega = 4{,}12\, s^{-1}$ jest częstością kołową, α_0 jest amplitudą, a ϕ - fazą początkową małych drgań pręta.

Punktacja:

Zad. 1B (0 - 12 pkt):

1. Wyznaczenie równania (4):	0 - 1 pkt;
2. Zapisanie równania ruchu pręta (równanie (5)):	0 - 1 pkt;
3. Wyznaczenie równania (6):	0 - 2 pkt;
4. Wyznaczenie równania (8):	0 - 2 pkt;
5. Wyznaczenie równania (9):	0 - 2 pkt;
6. Wyznaczenie równania (10):	0 - 2 pkt;
7. Znalezienie rozwiązania równania (6):	0 - 2 pkt.