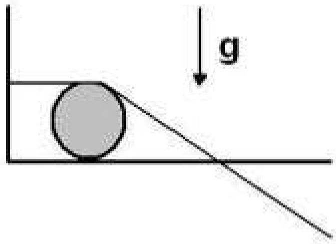
XLIV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T4

Pod wpływem działania sił napięcia nici po poziomych szynach toczy się bez poślizgu walec, ryc8. Pozioma część nici jest przymocowana do ściany, nić ślizga się bez tarcia po powierzchni walca. Do drugiego końca nici jest przymocowany ciężarek. Okazało się, że podczas ruchu kąt nachylenia do pionu zwisającej części nici nie ulegnie zmianie.



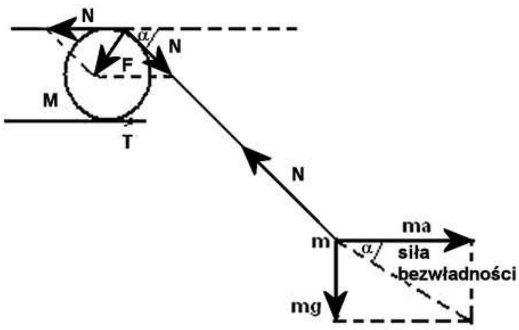
Ryc**. 8**

1. Oblicz przyspieszenie walca w zależności od stosunku masy walca do masy ciężarka.
2. Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia między walcem a szynami, aby nie zachodziło ślizganie walca po szynach? (moment bezwładności walca $I = (1/2)\cdot$ (masa walca)·(promień walca)^2).

Nić jest witka, nieważka i nierozciągliwa.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T4

Przyjmijmy oznaczenia sił, ich punktów zaczepienia i kierunków działania, tak jak na rycinie 9. Niech N oznacza napięcie nici, a T - siłę tarcia. Poza tym niech m, M, R i a oznaczają odpowiednio masę ciężarka ora masę, promień i przyspieszenie walca.



Ryc. 9

Z równań ruchu walca,

$$TR = I\varepsilon = (1/2)MR^2(a/R)\,, \tag{1}$$
$$F\cos((\pi - \alpha)/2) - T = Ma\,, \tag{2}$$

dostajemy zależności

$$T = (1/2)Ma \text{ oraz } N - N\cos\alpha = (3/2)Ma\,. \tag{3}$$

W układzie odniesienia związanym ze środkiem walca, poruszającym się z przyspieszeniem a (w lewo) na ciężarek o masie m, działa siła ciężkości mg oraz siła bezwładności ma (skierowana w prawo). Ponieważ nić zachowuje stałe nachylenie do pionu, to wypadkowa tych sił jest skierowana wzdłuż nici, czyli $tg\alpha = g/a$.

Zatem

$$\cos\alpha = a(a^2 + g^2)^{-1/2}\,. \tag{4}$$

Równanie ruchu ciężarka w rozważanym układzie odniesienia ma postać

$$m(a^2 + g^2)^{1/2} - N = ma\,, \tag{5}$$

gdyż ciężarek porusza się w tym układzie z przyspieszeniem a w kierunku prostoliniowego przedłużenia nici (długość zwisającej części nici zwiększa się z takim samym przyspieszeniem, z jakim porusza się walec względem szyny). Podstawiając $z = (a^2 + g^2)^{1/2}$ do (3 - 5) otrzymujemy równanie

$$(z - a)^2 - Aaz = 0\,, \tag{6}$$

gdzie

$$A = (3/2)(M/m)\,. \tag{7}$$

Ze względu na nierówność $z > a$ z dwóch rozwiązań równania (4)

$$z = a + (a/2)\cdot[A \pm (A(A+4))^{1/2}]\,, \tag{8}$$

pozostawiamy do dalszych rozważań tylko to ze znakiem „+". Korzystając z równania

$$z^2 = a^2 + g^2 \tag{9}$$

otrzymujemy przyspieszenie walca

$$a = dB^{1/2}\,, \tag{10}$$

gdzie

$$B = (1/2)[-1 + (A+2)/(A(A+4))^{1/2}]\,.$$

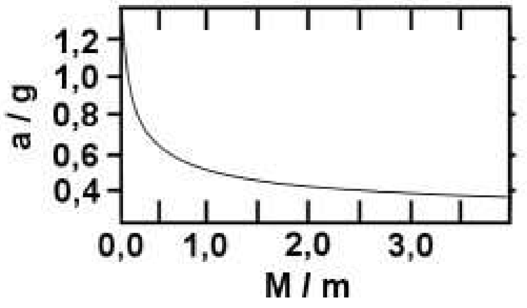
Z warunku toczenia walca

$$T = (1/2)Ma \le f(Mg + N\sin\alpha) = fg[M + m(1 - a(a^2 + g^2)^{-1/2})] \tag{11}$$

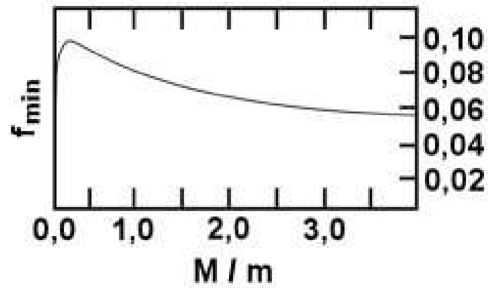
otrzymujemy nierówność, którą musi spełniać wartość współczynnika tarcia:

$$f \geq f_{\min} = (1/3)\cdot A \cdot B^{1/2} /[(2/3)A + 1 - (1 + 1/B)^{-1/2}]\,. \qquad (12)$$

Poniżej podajemy wykresy przyspieszenia a (ryc.10) oraz wykres $f_{\min}$ (12) (ryc.11) od stosunku mas M/m.



Ryc. 10



Ryc. 10

Punktacja

równanie 1	max. 2 pkt
równanie 2	max. 2 pkt
równanie 5	max. 2 pkt
równanie 10	max. 3 pkt
równanie 12	max. 1 pkt

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF” Maj / Czerwiec 1995r.

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl