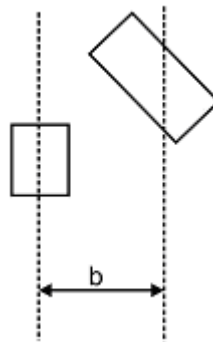


XLII OLIMPIADA FIZYCZNA (1992/1993). Stopień III, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło:	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Włodzimierz Ungier, Krzysztof Karpierz: Fizyka w Szkole nr 1, 1994.
Nazwa zadania:	Zachowanie się płaskich klocków po ich zderzeniu.
Działy:	Dynamika
Słowa kluczowe:	Dynamika, zderzenie sprężyste, tarcie, ruch postępowy, ruch obrotowy, prędkość kątowna, moment bezwładności, pęd, środek masy.

Zadanie teoretyczne – T1, zawody teoretyczne III stopnia, XLII OF.

Po płaskim, poziomym stole ślizgają się bez tarcia dwa różne płaskie klocki o jednakowych masach m . Początkowo klocki przemieszczają się ruchem postępowym (bez obrotów) tak, że ich środki mas poruszają się z jednakowymi prędkościami v po równoległych liniach prostych. Odległość między tymi liniami wynosi d . Rysunek 1 przedstawia jedną z możliwych konfiguracji klocków.



Rys.1.

W pewnym momencie następuje doskonale sprężyste zderzenie klocków. Po zderzeniu klocki wykonują ruch postępowo – obrotowy nadal ślizgając się po powierzchni stołu. Prędkość kątowna pierwszego klocka wynosi ω_1 , zaś prędkość kątowna drugiego wynosi ω_2 . Moment bezwładności klocków względem osi pionowych przechodzących przez środki mas klocków wynoszą odpowiednio I_1 i I_2 .

- 1) Wykaż, że moment pędu klocka względem dowolnego, ustalonego punktu stołu jest równy sumie momentu pędu środka masy klocka względem tego punktu oraz momentu pędu klocka względem jego środka masy.
- 2) Oblicz odległość d' między prostymi, po których poruszają się środki mas klocków po zderzeniu.
- 3) Przyjmując, że po zderzeniu wartości prędkości pierwszego klocka wynosi $v = \frac{v^2}{2}$.
Zaś drugi klocek nie wykonuje obrotów, podaj i zinterpretuj (naszkić) zależność d' od d .

Rozwiązanie

Niech r_i i r'_i oznaczają odpowiednio wektory wodzące punktów materialnych o masach m_i w układzie związanym ze stołem i w nie obracającym się układzie środka masy klocka. Wtedy $r_i = R + r'_i$ i $v_i = V + v'_i$, gdzie $v_i = dr_i/dt$ i $v'_i = dr'_i/dt$, zaś wektory R i V odnoszą się do środka masy. Moment pędu wyraża się wzorem

$$J = \sum_i m_i r_i \times v_i = \sum_i m_i R \times V + \sum_i m_i r'_i \times V + \sum_i m_i R \times v'_i + \sum_i m_i r'_i \times v'_i = MR \times V + I\omega \quad (1)$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\sum_i m_i r'_i = 0 \quad (\text{środek masy})$$

i z jej pochodnej

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \sum_i m_i r'_i = \sum_i m_i v'_i = 0$$

$$\sum_i m_i = M$$

jest całkowitą masą klocka, zaś I – jego momentem bezwładności względem przechodzącej przez środek masy osi obrotu, określonej przez prostopadły do powierzchni stołu wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$. Ponieważ wektory r' i v' są wzajemnie prostopadłe i oba leżą w płaszczyźnie stołu, ich iloczyn wektorowy $r'_i \times v'_i$ jest skierowany zgodnie z $\vec{\omega}$. Wartość prędkości $v'_i = |\omega| r'_i$, zatem

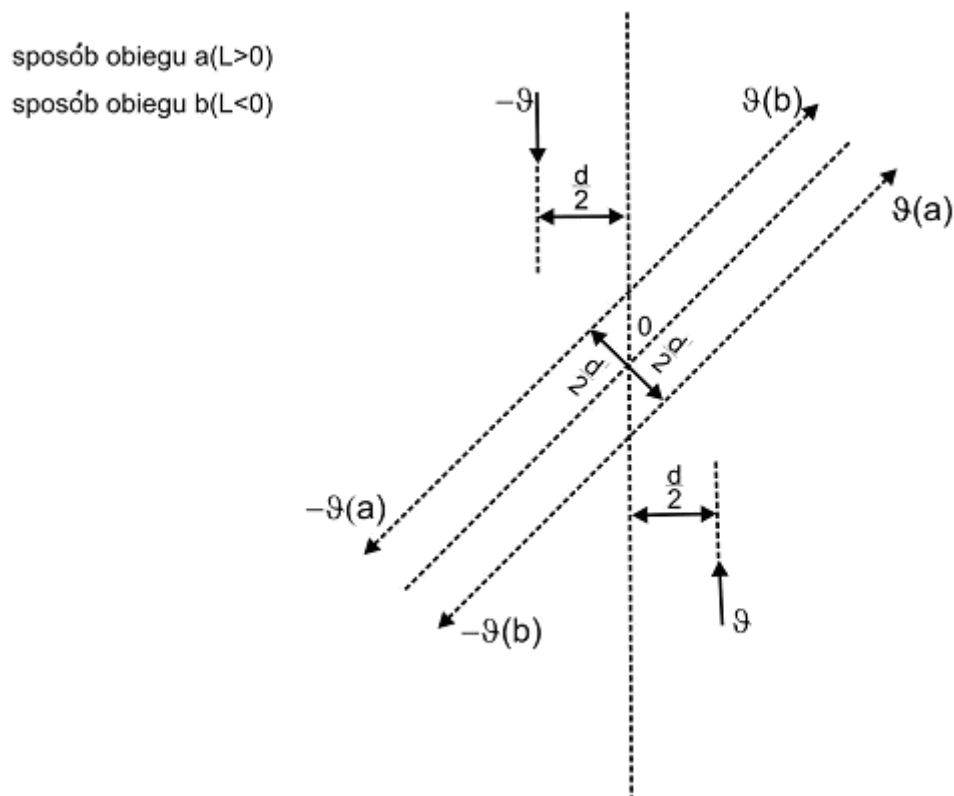
$$\sum_i m_i r'_i \times v'_i = \sum_i m_i r_i'^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega} \quad (2)$$

Po zderzeniu prędkości klocków będą jednakowe, co do wartości, lecz przeciwnie skierowane, co wynika z zasady zachowania całkowitego pędu układu. Korzystając z zasady zachowania energii i momentu pędu układu dwóch klocków otrzymujemy równania

$$2 \frac{m v^2}{2} = 2 \frac{m v'^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \quad (3)$$

$$2m v \frac{d}{2} = \pm 2m v' \frac{d'}{2} + I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 \quad (4)$$

gdzie d' i v' oznaczają odpowiednio odległość wzajemną torów i wartość prędkości klocków po zderzeniu. Prędkościom kątowym $\omega < 0$ odpowiada obrót klocka w kierunku zgodnym, zaś prędkościom $\omega > 0$ – obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (patrzmy z góry na klocek ślizgający się po stole). Orbitalny moment pędu układu klocków względem wspólnego środka masy O , $L = \pm m v' d'$, jest dodatni lub ujemny, w zależności od sposobu obiegu punktu O przez oba klocki po zderzeniu, rysunek 2.



Rys. 2.

Z równań (3) i (4) wyznaczamy v'

$$v' = \sqrt{v^2 - \frac{I_1 \omega_1}{2m} - \frac{I_2 \omega_2}{2m}} \quad (5)$$

oraz d'

$$d' = \left| \frac{m v d - I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2}{m v'} \right| \quad (6)$$

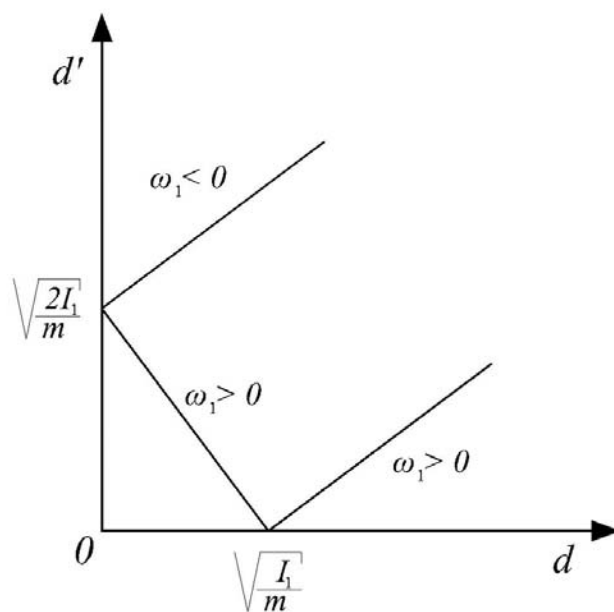
Ponieważ wartość prędkości obu klocków po zderzeniu wynosi $v' = \frac{v^2}{2}$, zaś $\omega_2 = 0$, korzystając ze wzoru (3) otrzymujemy

$$\omega_1 = \mp v \sqrt{\frac{m}{I_1}} \quad (7)$$

skąd po podstawieniu do (6) otrzymujemy

$$d' = 2 \left| d - \frac{I_1 \omega_1}{m v} \right| = 2 \left| d \mp \sqrt{\frac{I_1}{m}} \right| \quad (8)$$

Wykres zależności d' od d jest przedstawiony na rysunku 3.



Rys. 3.