

## XL OLIMPIADA FIZYCZNA (1990/1991). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2.

**Źródło:** Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;  
Włodzimierz Ungier, Marta Kicińska–Habior: Fizyka w Szkole nr 1, 1992.

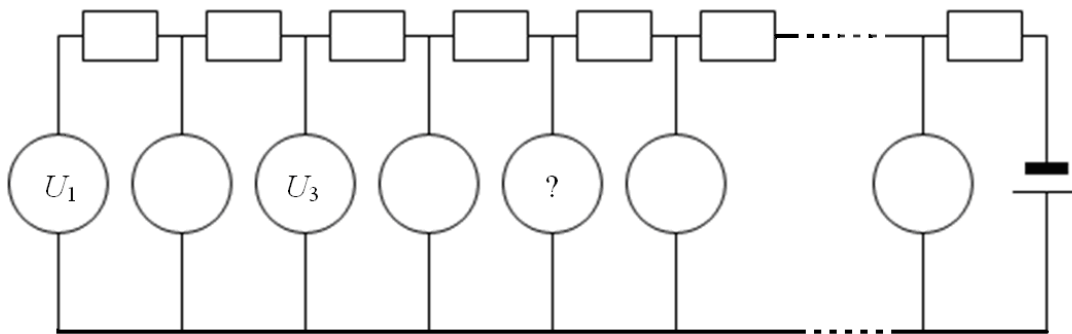
**Nazwa zadania:** Wskazania woltomierza dla sieci złożonej z woltomierzy i oporników

**Działy:** Elektryczność

**Słowa kluczowe:** obwód, opór elektryczny, sieć, łączenie oporników, napięcie, natężenie prądu, prawo Ohma, Kirchhoffa, równanie rekurencyjne.

### Zadanie teoretyczne – T2, zawody teoretyczne stopnia III, XL OF.

W obwodzie elektrycznym przedstawionym na rycinie 1 użyto skończonej liczby  $n > 5$  jednakowych woltomierzy i takiej samej liczby jednakowych oporników omowych. Woltomierz pierwszy i trzeci wskazywały odpowiednio  $U_1 = 8 \text{ V}$  i  $U_3 = 10 \text{ V}$ . Jakie napięcie wskazuje piąty woltomierz?

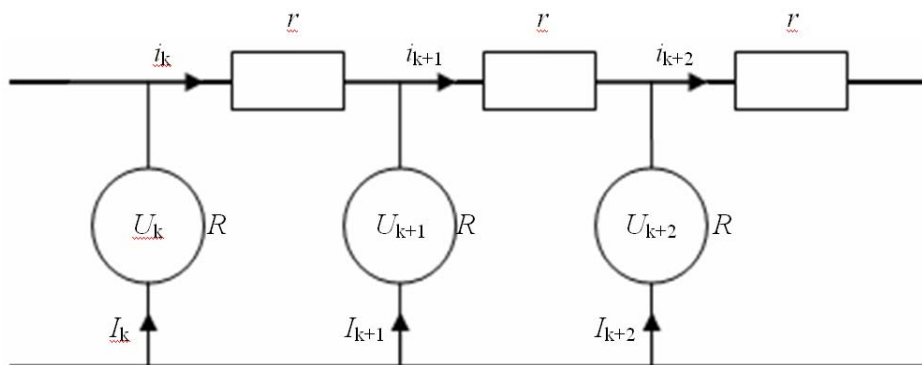


Ryc.1

### Rozwiązanie

Oznaczamy przez  $R$  opór każdego z oporników. Rozważamy fragment obwodu przedstawiony na ryc.2. Z prawa Kirchhoffa i prawa Ohma otrzymujemy równanie rekurencyjne dla  $k \geq 1$

$$U_{k+2} = U_{k+1} + I_{k+1}R = U_{k+1} + (I_{k+1} + I_k)R = U_{k+1} + \left[ \frac{U_{k+1}}{R} + \frac{U_{k+1} - U_k}{R} \right]R = U_{k+1} \frac{2+R}{R} - U_k \quad (1)$$



Ryc.2

Dla fragmentu zawierającego pierwsze dwa woltomierze mamy  $I_1 = i_1$ , czyli

$$\frac{U_1}{R} = \frac{(U_2 - U_1)}{R}, \quad (2)$$

skąd wynika równość

$$\frac{r}{R} = \frac{U_2}{U_1 - 1}.$$

Zatem równanie rekurencyjne (1) możemy sprowadzić do postaci

$$U_{k+2} = U_{k+1} \left( \frac{1 + U_2}{U_1 - 1} \right). \quad (3)$$

Ponieważ wartości  $U_1$  i  $U_3$  są dane, z równania (3) dla  $k = 1$ ,

$$U_3 = U_2 + \frac{U_2^2}{U_1} - U_1. \quad (4)$$

Możemy wyznaczyć wartości napięcia  $U_2$ :

$$U_2 = \frac{1}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{5 + \frac{4U_3}{U_1}} \right] U_1. \quad (5)$$

Ze względu na to, że napięcie na wszystkich woltomierzach musza być tego samego znaku, przyjmujemy rozwiązanie (5) ze znakiem „+” jako jedyne,

$$U_2 = 4(\sqrt{10} - 1)V. \quad (6)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\alpha = 1 + \frac{U_2}{U_1} = \frac{1 + \sqrt{10}}{2}$$

Wartość napięcia  $U_5$  możemy otrzymać korzystając kilkakrotnie z równania rekurencyjnego (3):

$$U_5 = \alpha U_4 - U_3 = \alpha(\alpha U_3 - U_2) - U_3 = (\alpha^2 - 1)U_3 - \alpha U_2 = \left( 5\sqrt{10} - \frac{1}{2} \right) V. \quad (7)$$