XXXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1989/1990). Stopień I, zadanie doświadczalne – D2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Jan Mostowski: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1990.

Nazwa zadania: Ruch wody w szklanej rurce.

Działy: Mechanika płynów, hydrodynamika.

Słowa kluczowe: siła ciężkości cieczy, lepkość cieczy, współczynnik lepkości, gęstość, słup powietrza

Zadanie doświadczalne – D2, zawody I stopnia, XXXIX OF.

Mając do dyspozycji:

- rurkę szklaną o długości ok. 30 cm i średnicy ok. 1 cm,
- linijkę, stoper,
- dwa korki do zatykania obu końców rurki,
- wodę,

wyznacz grubość warstwy wody płynącej po ścianie rurki podczas przelewania się wody z jednej części do drugiej. Podczas przelewania rurka trzymana jest pionowo a długość słupka powietrza powinna być ok. 5 cm. Współczynnik lepkości wody odczytaj z tablic.

Wskazówka. Siła tarcia związana z lepkością między ślizgającymi się po sobie warstwami cieczy jest proporcjonalna do powierzchni S rozgraniczającej warstwy i do wielkości $\Delta V/\Delta X$, gdzie ΔV jest różnicą prędkości cieczy między warstwami odległymi o ΔX.

Stałą proporcjonalności η we wzorze $\dfrac{F}{S} = \eta\dfrac{\Delta V}{\Delta X}$ nazywamy współczynnikiem lepkości.

Rozwiązanie:

Część teoretyczna.

Wyobraźmy sobie, że napełniamy pionową rurkę wodą, pozostawiając niewielki słupek powietrza i zatykamy rurkę korkiem. Nagłym ruchem odwracamy rurkę o 180° i obserwujemy ruch słupka powietrza ku górze. Ruch ten polega na przelewaniu się wody z górnej części rurki do dolnej po jej ściankach. Zakładamy, że całe zjawisko przebiega pod wpływem siły ciężkości cieczy otaczającej słupek powietrza.

Rozwiązanie zadania polega na znalezieniu związku pomiędzy prędkością ruchu słupka powietrza ku górze a grubością warstwy cieczy. Następnie mierząc prędkość słupka wyznaczamy grubość warstwy cieczy.

Rozważmy element cieczy o grubości dx odległy o x od środka rurki. Siła ciężkości działająca na ten element cieczy ma wartość:

$$\Delta F(x) = 2\pi h\rho g x\Delta x,$$

gdzie h oznacza wysokość słupka cieczy, a ρ jej gęstość. Siła lepkości działająca na tę warstwę cieczy jest sumą sił pochodzących od warstw sąsiednich:

$$\Delta F_L(x) = \eta\,[S(x)V'(x) - S(x+\Delta x)V'(x+\Delta x)],$$

gdzie $V(x)$ oznacza prędkość warstwy cieczy w odległości x od środka rurki, $V'(x)$ oznacza pochodną prędkości, a $S(x) = 2\pi xh$ jest powierzchnią rozważanej warstwy cieczy. W granicy $\Delta x \to 0$ dostajemy:

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}x}=-\eta\left[\frac{2\pi xh\,\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2\pi h\,\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right].$$

Z wyprowadzonych zależności wynika następujące równanie różniczkowe na zależność prędkości od odległości od środka rurki słuszne jedynie wtedy, gdy pęcherzyk powietrza porusza się bez przyspieszenia:

$$\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\rho g}{\eta}.$$

Równanie to jest podstawą naszej analizy. Opisuje ono rozkład prędkości cieczy podczas przepływu z góry na dół rurki. Aby je rozwiązać powinniśmy znać jeszcze warunki, jakie spełnione są przez prędkość cieczy na powierzchni rurki oraz na granicy cieczy i pęcherzyka powietrza. Ponieważ ciecz jest lepka, jej prędkość tuż przy powierzchni rurki powinna być równa zeru:

$$V(x=r)=0.$$

Nieco trudniej jest znaleźć warunek, jaki spełnia prędkość cieczy przy powierzchni pęcherzyka. Aby zrozumieć ten warunek wróćmy do równania wyznaczającego siły lepkości działające na poszczególne warstwy cieczy i zastosujmy je do warstwy leżącej tuż przy powierzchni pęcherzyka. Ponieważ warstwa ta styka się z tylko z jedną, a nie z dwiema sąsiednimi warstwami cieczy dostajemy:

$$\Delta F_{\mathrm{L}}(x)=\eta\,[0-S(x+\Delta x)V'(x+\Delta x)]\,.$$

Dla bardzo małych Δx znajdujemy:

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{L}}(x)}{\mathrm{d}x\Delta x}=-\eta S(x)V'(x)$$

A zatem na granicy cieczy i powietrza $V'(x)$ musi być równe zeru, gdyż Δx jest dowolnie małe. Ostatecznie drugi warunek na $V(x)$ jest następujący:

$$V'(x=r_{\mathrm{D}})=0\,,$$

gdzie r_{D} oznacza promień pęcherzyka powietrza.

Wracamy teraz do równania na prędkość cieczy. Aby je rozwiązać zauważmy, że lewa strona może być zapisana w postaci pochodnej:

$$[xV'(x)]'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\rho g}{\eta}.$$

A zatem:

$$xV'(x)=-\frac{\rho g x^2}{2\eta}+G\,,$$

gdzie G jest stałą dowolną. Uzyskaliśmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu, które można rozwiązać:

$$V(x)=\frac{-\rho g x^2}{4\eta}+G\ln(x)+U\,,$$

gdzie U jest znowu stałą dowolną. Obie stałe G i U wyznaczymy z warunków, jakie spełnia prędkość na powierzchni rurki i powierzchni zetknięcia z powietrzem. Dostajemy, dla $x=r$:

$$V(r)=\frac{-\rho g r^2}{4\eta}+G\ln(r)+U=0$$

oraz

$$V'(r_D) = \frac{-\rho g r_p}{2\eta} + \frac{G}{r_\mathrm{D}} + U = 0.$$

Po rozwiązaniu tych równań względem G i U dostajemy:

$$V(x) = \frac{-\rho g\left(x^2 - r^2\right)}{4\eta} - \left(\frac{\rho g}{2\eta}\right) r_\mathrm{D}^2 \ln\left(\frac{x}{r}\right).$$

Jest to dość zawiłe wyrażenie na zależność prędkości od odległości od środka rurki. Uprościmy je nieco korzystając z faktu, że warstwa cieczy jest cienka w porównaniu z promieniem rurki, a zatem x niewiele różni się od r. Oznaczmy $y = r - x$ oraz $d = r - r_\mathrm{D}$ (ta ostatnia wielkość jest szukaną grubością warstwy cieczy). Korzystamy z zależności:

$$\ln\left(1 - \frac{y}{r}\right) = -\frac{y}{r} - \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^2}{2}$$

i dostajemy:

$$V(x) = \frac{-\rho g}{2\eta}\left[\left(r_\mathrm{D}^2 - r^2\right)\left(\frac{y}{r}\right) + \left(r_\mathrm{D}^2 + r^2\right)\left(\frac{r^2}{2r^2}\right)\right].$$

Jest to ostateczny wzór na prędkość cieczy przy przelewaniu się z górnej części rurki do dolnej.

Prędkość ruchu słupka powietrza ku górze znajdujemy dzieląc objętość przelewającej się wody przez pole powierzchni przekroju poprzecznego rurki:

$$V_B = \frac{W}{\pi r^2}.$$

Objętość przelewającej się wody wynosi:

$$W(x) = 2\pi \int_{r_\mathrm{D}}^{r} V(x)\, x\, \mathrm{d}x.$$

Wielkość W oblicza się wykonując całkę. Nie jest to trudne, gdyż funkcja podcałkowa jest wielomianem trzeciego stopnia względem zmiennej całkowania.
Na podstawie znajomości W znajdujemy:

$$V_B = \left(\frac{4\rho g}{3r\eta}\right)\left(r - r_\mathrm{D}\right)^3$$

(wyrazy proporcjonalne do $(r - r_\mathrm{D})^4$ zostały pominięte).

Otrzymaliśmy więc związek pomiędzy prędkością poruszającego się pęcherzyka i grubością warstwy cieczy. Mierząc V_B można więc wyznaczyć grubość warstwy cieczy, o ile tylko zna się jej gęstość oraz lepkość.

Część doświadczalna

Do pomiarów użyto rurki (probówki) o średnicy r = 9 mm i zmierzono zależność prędkości V_B od wysokości spoczynkowej słupka h. Wyniki zawarte są w tabeli II.

Tabela II

h, cm	4,2	2,6	1,35
V_B, $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$	7,44	7,50	7,53

Widzimy, że prędkość praktycznie nie zależy od wysokości słupka powietrza.
Do obliczeń wzięto g = 981 cm/s^2, ρ = 1 g/cm^3, $\eta = 1 \cdot 10^{-2}$ puaza.

Obliczona stąd grubość warstwy cieczy wynosi d = 0,29 mm. Pomiary d nie wykazały znaczącego rozrzutu statystycznego. Na błąd d wpływa błąd pomiaru prędkości, $\mathrm{d}V_\mathrm{B} = 0{,}04\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, a stąd niepewność pomiarowa d wynosi około 0,02 mm. Ta wartość niepewności pomiarowej jest znacznie zaniżona.