

XXXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1989/1990). Stopień II, zadanie doświadczalne – D

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Włodzimierz Ungier: *Fizyka w Szkole* nr 5, 1990.

Nazwa zadania: Wyznaczanie oporności właściwej elektrolitu

Działy: Elektryczność

Słowa kluczowe: natężenie, potencjał pola elektrycznego, zasada zachowania ładunku, superpozycji, gęstość prądu, opór, oporność właściwa, źródło prądu, elektrolit, bateria.

Zadanie doświadczalne – D1, zawody II stopnia, XXXIX OF.

Mając do dyspozycji:

- szerokie i długie naczynie o płaskim dnie,
- 4 równoległe elektrody w postaci odcinków prostego, cienkiego drutu miedzianego umocowane wzdłuż jednej linii, w stałych odległościach jedna od drugiej,
- źródło prądu stałego (baterijka płaska),
- 2 mierniki na prąd stały,
- przewody do połączeń, krokodylki,
- papier milimetrowy,
- elektrolit (wodny roztwór siarczanu miedzi) w zlewce,

wyznacz oporność właściwą elektrolitu. Dlaczego w doświadczeniach tego typu lepiej było używać prądu przemiennego?

Uwaga: Elektrody dochodzą do dna naczynia. Listewka, w której umocowane są elektrody powinna być sucha.

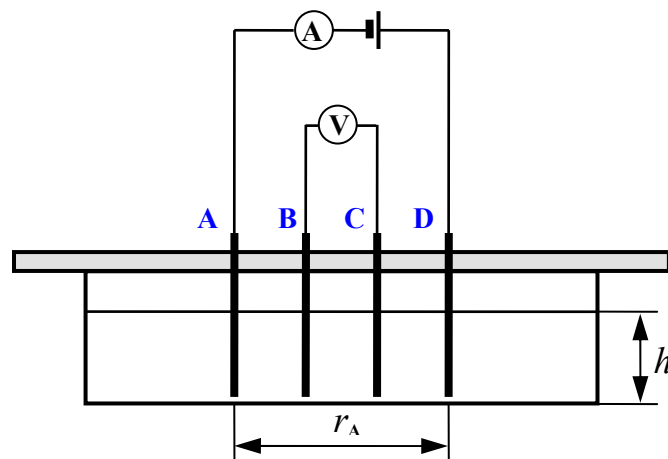
Przed przystąpieniem do pomiarów konieczne jest zwrócenie się do asystenta w celu sprawdzenia obwodu.

Propozycja tego zadania była też z użyciem transformatora dzwonekowego dającego napięcie 5 V, jednak z tej propozycji zrezygnowano ze względu na kłopoty ze skompletowaniem wystarczającej liczby odpowiednich transformatorów dzwonekowych.

Rozwiązanie**Część teoretyczna**

Układ doświadczalny pokazany na rys.1.

Oporność właściwą elektrolitu ρ wyznaczamy przykładając napięcie ze źródła do 2 elektrod zewnętrznych (A i D) i mierząc napięcie pomiędzy 2 elektrodami wewnętrznymi (B i C). Uzasadnienie tej metody pomiaru jest następujące. Prąd o natężeniu I wpływający przez elektrodę A rozplywa się symetrycznie do „nieskończoności” i jego gęstość w odległości r_A od elektrody A wynosi $j_A(r_A) = I/(2\pi hr_A)$, gdzie h oznacza głębokość warstwy elektrolitu; zakładamy, że elektrody sięgają do dna i h jest wszędzie jednakowe. Z prawa zachowania ładunku wynika, że natężenie prądu płynącego przez każdą powierzchnię walcową o promieniu r współśrodkową z elektrodą A jest stałe i równe I . Z drugiej strony prąd o natężeniu I dopływa z „nieskończoności” i wypływa przez elektrodę D, a jego gęstość w odległości r_D od elektrody D $j_D(r_D) = I/(2\pi hr_D)$. Aby wyznaczyć napięcie na linii łączącej elektrody skorzystamy z zasady superpozycji.

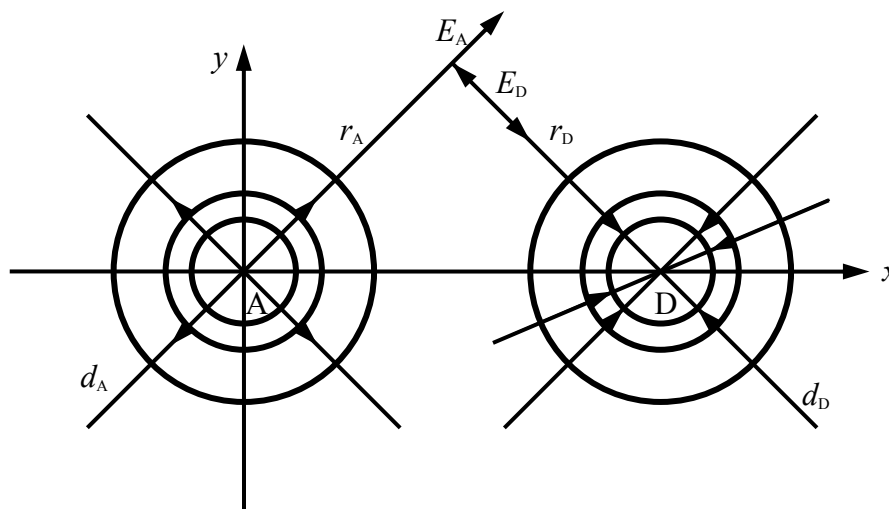


Rys.1

I metoda

Korzystając ze związku $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$, gdzie wektor \mathbf{E} jest natężeniem pola elektrycznego a wektor \mathbf{j} gęstością prądu elektrycznego, wyznaczamy natężenie pola elektrycznego w odległości r_A od elektrody A pochodzące od prądu wpływającego elektrodą A – rys. 2

$$E_A(r_A) = I\rho/(2\pi r_A h).$$



Rys. 2.

Z zależności $\Phi = \int \mathbf{E} d\mathbf{r}$ wyznaczamy potencjał tego pola w odległości r_A od elektrody A

$$\Phi_A(r_A) = -\int I\rho/(2\pi r_A h) dr = -I\rho/(2\pi r h) \ln r_A + C_1.$$

Analogicznie natężenie pola pochodzącego od prądu wypływającego elektrodą D wynosi w odległości r_D od elektrody D

$$E_D(r_D) = I\rho/(2\pi r_D h).$$

Zauważamy przy tym, że wektory \mathbf{E}_A i \mathbf{r}_A mają w układzie związanym z elektrodą A ten sam zwrot, a wektory \mathbf{E}_D i \mathbf{r}_D mają w układzie związanym z elektrodą D zwroty przeciwne (patrz rys.2). Potencjał pola \mathbf{E}_D w odległości r_D od elektrody D wynosi więc

$$\Phi_D(r_D) = \int I\rho/(2\pi r_D h) dr = I\rho/(2\pi r h) \ln r_D + C_2.$$

Korzystając z zasady superpozycji obliczamy całkowity potencjał w dowolnym punkcie odległym o r_A od elektrody A i o r_D od elektrody D jako sumę

$$\Phi = \Phi_A(r_A) + \Phi_D(r_D).$$

Dla punktów leżących na linii łączącej elektrody A i D $r_D = d - r_A$, a więc całkowity potencjał w punkcie leżącym na linii łączącej A i D, odległym o r_A od elektrody A (w układzie związanym z A)

$$\Phi(r_A) = C_1 + C_2 - I\rho/(2\pi h) \ln r_A + I\rho/(2\pi h) \ln(d - r_A).$$

Stąd potencjał w punkcie B (elektroda B) i w punkcie C (elektroda C) obliczamy jako

$$\Phi(r_B) = C_1 + C_2 - I\rho/(2\pi h) \ln r_B + I\rho/(2\pi h) \ln(d - r_B).$$

gdzie r_B i r_C – odległości elektrod B i C od elektrody A. Mierzona różnica potencjałów ΔU pomiędzy elektrodami B i C wynosi

$$\Delta U = \Phi(r_B) - \Phi(r_C) = I\rho/(2\pi h) \ln\{[r_C(d - r_B)]/[r_B(d - r_C)]\}.$$

Stąd oporność właściwa elektrolitu

$$\rho = 2\pi h(\Delta U/I) \cdot 1/\ln\{[r_C(d - r_B)]/[r_B(d - r_C)]\}.$$

II metoda

To samo wyrażenie na ρ możemy otrzymać korzystając z zasady superpozycji obwodów. Dla bardzo małych odcinków Δr opór warstwy elektrolitu (r , $r + \Delta r$) można obliczyć jakby była ona płaska

$$\Delta R = \rho \Delta r / (2\pi r h),$$

a więc spadek napięcia na odcinku Δr_A pochodzący od prądu o natężeniu I wpływającego przez elektrodę A wynosi

$$\Delta U_A = I \Delta R_A = I \rho \Delta r_A / (2\pi r_A h).$$

Analogicznie spadek napięcia na odcinku Δr_D pochodzący od prądu wypływającego przez elektrodę D

$$\Delta U_D = I \Delta R_D = I \rho \Delta r_D / (2\pi r_D h).$$

Na odcinku łączącym elektrody A i D prąd wpływający przez elektrodę A i prąd wypływający przez D płyną w tę samą, a $r_D = d - r_A$. Korzystając z zasady superpozycji obwodów obliczamy całkowity spadek napięcia na odcinku Δr_A leżącym wewnątrz odcinka łączącego elektrody A i D jako

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_D = I\rho/(2\pi h) [1/r_A + 1/(d - r_A)] \Delta r_A.$$

Przechodząc do granicy

$$dU/dr_A = I\rho/(2\pi h) [1/r_A + 1/(d - r_A)].$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest funkcja

$$U(r_A) = I\rho/(2\pi h) [\ln r_A - \ln(d - r_A)] + C.$$

Tak więc spadek napięcia pomiędzy elektrodami B i C wynosi

$$\Delta U = U(r_C) - U(r_B) = I\rho/(2\pi h) \ln\{[r_C(d - r_B)]/[r_B(d - r_C)]\}.$$

Stąd oporność właściwa elektrolitu

$$\rho = 2\pi h(\Delta U/I) \cdot 1/\ln\{[r_C(d - r_B)]/[r_B(d - r_C)]\}.$$

Wyznaczenie oporności właściwej elektrolitu sprowadza się więc do pomiaru natężenia prądu I płynącego ze źródła oraz napięcia ΔU pomiędzy elektrodami wewnętrznymi B i C przy określonej wysokości warstwy elektrolitu h w naczyniu.

Część doświadczalna

Doświadczenie wykonano dla wodnego roztworu siarczanu miedzi o stężeniu 0,32% (5 g $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ na 1 litr wody destylowanej), który wlewano stopniowo do porcelanowej kuwety chemicznej o wymiarach 32 cm x 25 cm x 5 cm. Ilość roztworu pozwala na napełnienie kuwety do wysokości $h = 3$ cm. Pomiar przeprowadzono dla 3 różnych wysokości 1 cm, 2 cm i 3 cm, mierząc wysokość warstwy elektrolitu suwmiarką. Możliwie dokładny pomiar wysokości h jest ważny ze względu na dokładność wyznaczenia ρ . W doświadczeniu przyjęto odległość między elektrodami A i D $d = 3$ cm oraz $r_B = d/3$, $r_C = 2d/3$. Odległości między elektrodami mierzono suwmiarką. Elektrody wykonane były z drutu miedzianego o średnicy 0,5 mm. W obliczeniach zaniedbano grubość elektrod. Jeśli drut jest pokryty lakierem izolacyjnym należy pamiętać by usunąć izolację zarówno z końców zanurzanych do roztworu (na długości odpowiadającej wysokości roztworu) jak i z końców przeciwnych. Uczniowie powinni otrzymać elektrody już umocowane, a więc dobrze byłoby pozbawić je izolacji przed umocowaniem. W doświadczeniu umocowano elektrody w listewce drewnianej, którą następnie oparto o brzegi naczynia. Elektrody powinny być umocowane stabilnie, tak aby po włożeniu do naczynia dotykały dna i były prostopadłe do dna. W celu poprawienia stabilności umocowania można użyć plasteliny. Zakłada się, że stół na którym stoi naczynie jest poziomy i grubość warstwy elektrolitu w całym naczyniu jest równa h .

Źródło prądu. Jako źródła prądu zmiennego w doświadczeniu użyto transformatora dzwonekowego dającego napięcie 5 V. Ponieważ jednak nie wszyscy mogą dysponować odpowiednimi źródłami prądu zmiennego, jak i miernikami prądu zmiennego o odpowiedniej dokładności, pomiary przeprowadzono także stosując źródło prądu stałego: 4.5 V (3R12).

Mierniki. Pomiar natężenia prądu I i pomiar napięcia ΔU pomiędzy elektrodami B i C wykonano z użyciem mierników uniwersalnych V640. Mierzone natężenia były rzędu 5 – 30 mA, a napięcia 0,5 – 0,8 V. Stosowane mierniki powinny zapewnić możliwość pomiaru tych wielkości z dokładnością ok. 2%. Opór wewnętrzny miernika stosowanego do pomiaru napięcia powinien być nie mniejszy niż 2,5 k Ω (dla $\Delta U = 0,5 - 0,8$ V). Warunki takie spełniają także mierniki łatwiej dostępne w pracowniach szkolnych jak np. UM3, UM4B, UM5A, UM5B, ale jedynie dla prądu stałego.

Elektrolit. Podczas przepływu prądu stałego przez elektrolit na elektrodach gromadzą się jony powodujące rozmaite procesy, wskutek których powierzchnia elektrod i koncentracja roztworu dookoła nich ulegają zmianom, co znowu wywołuje siłę elektromotoryczną, skierowaną przeciwnie niż siła elektromotoryczna wywołująca prąd. Zjawisko to nosi nazwę polaryzacji galwanicznej. Wynikiem jej jest wyznaczenie zbyt dużej wartości oporu elektrolitu. Polaryzacja staje się nieznaczna przy użyciu prądu zmiennego, gdyż jony wydzielane podczas przepływu prądu w jednym kierunku zostają zobojętnione przez jony przeciwnego znaku podczas przepływu prądu w kierunku przeciwnym. Efekty polaryzacji zmniejszyć można też częściowo przez odpowiedni wybór elektrod i elektrolitu. Dlatego też w zadaniu wybrano wodny roztwór siarczanu miedzi i jako elektrody druty miedziane.

Przedstawiona metoda stosuje się dość dobrze do wyznaczania oporu elektrolitów silnie rozcieńczonych. Proponowane stężenia otrzymuje się rozpuszczając 5 g $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ w 1 litrze wody. Należy podkreślić, że opór właściwy elektrolitu zależy od stężenia roztworu i od jego temperatury. Do sporządzenia roztworu w doświadczeniu użyto wody destylowanej o temperaturze pokojowej. Można też użyć wody przegotowanej o temperaturze pokojowej, ale należy się liczyć z pewnym odchyleniem wyniku od podanego w tabeli. Objętość elektrolitu przeznaczona dla jednego zawodnika powinna wystarczyć do napełnienia naczynia do wysokości 3 cm. Zalecane są przy tym napięcia ze źródła około 5 V. Prąd płynący w obwo-

dzie nie powinien być większy niż 40 mA, gdyż przy zwiększonym prądzie wzrasta efekt polaryzacji elektrod.

Pomiary. Pomiary przeprowadzono dla kilku wysokości elektrolitu w naczyniu, co pozwala zmniejszyć błąd związany z nierównościami dna naczynia. Dla każdej wysokości pomiar powinien być przeprowadzony kilka razy.

Wyniki pomiarów dla obu stosowanych źródeł prądu przedstawione są w tabeli I.

Tabela I

Dla transformatora dzwonekowego 5 V			
h (cm)	I (mA)	ΔU (V)	ρ ($\Omega \cdot \text{cm}$)
1,0	8,6	0,78	411 ± 10
2,0	17,0	0,78	416 ± 9
3,0	26,0	0,78	408 ± 8
Dla baterijki 4,5 V			
h (cm)	I (mA)	ΔU (V)	ρ ($\Omega \cdot \text{cm}$)
1,0	5,1	0,55	489 ± 13
2,0	10,0	0,54	475 ± 11
3,0	14,8	0,54	496 ± 15

Zgodnie z oczekiwaniami pomiar z baterijką jako źródłem prądu dał wyższą wartość oporu właściwego elektrolitu.

Ocena niepewności pomiarowych

Wielkości mierzone obarczone są niepewnością pomiarową związaną z dokładnością użytych przyrządów: $\delta(\Delta U) = 0,01$ V, $\delta I = 0,1$ mA, $\delta h = 0,1$ mm, $\delta r = 0,1$ mm.

Dodatkowo występują pewne błędy systematyczne np. błąd pomiaru h związany z występowaniem menisku, błąd pomiaru r związany z zaniedbaniem skończonej grubości elektrod, błąd metody wyznaczenia ρ związany z zaniedbaniem efektów brzegowych na ściankach naczynia (założenie rozplływania się prądu do nieskończoności), oraz błąd związany z występowaniem polaryzacji elektrod, który jest mały dla źródła prądu zmiennego, ale dla źródła prądu stałego jest istotny i powoduje zawyżenie wartości zmierzonej oporu właściwego.

Punktacja

Część teoretyczna

1. Wykorzystanie zasady superpozycji do 4 pkt.
2. Wzór na ΔU do 5 pkt.
3. Ostateczny wzór na ρ do 1 pkt.

Część doświadczalna

4. Opis metody do 3 pkt.
5. Pomiary (różne h) do 4 pkt.
6. Ocena niepewności pomiarowych do 2 pkt.
7. Dlaczego prąd zmienny do 1 pkt.