XXXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1989/1990). Stopień I, zadanie teoretyczne – T5

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Jan Mostowski: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1990.

Nazwa zadania: Odległość między płytami kondensatora po włączeniu napięcia

Działy: Elektrostatyka

Słowa kluczowe: kondensator, napięcie, pojemność kondensatora, siła sprężystości, oddziaływanie elektrostatyczne, energia, sprężyna

Zadanie teoretyczne – T5, zawody I stopnia, XXXIX OF.

Jedna z płyt kondensatora płaskiego umocowana jest na sprężynie o stałej sprężystości k. Pole powierzchni każdej z płyt wynosi S, a odległość między płytami wynosi d. Wyznacz odległość między płytami po podłączeniu kondensatora do baterii o napięciu U. Opisz szczegółowo sytuacje skrajne: gdy stała sprężystości jest duża ($kd^3U^2 > \varepsilon_0 S$) i gdy stała sprężystości jest mała ($kd^3U^2 < \varepsilon_0 S$) Opisz jakościowo, co będzie w przypadku pośrednich stałych sprężystości.

Rozwiązanie

Po podłączeniu kondensatora do baterii płyty naładują się ładunkami przeciwnego znaku, a zatem będą się przyciągać. Sile przyciągającej przeciwstawi się siła sprężystości sprężyny. Działanie obu tych sił prowadzi do położenia równowagi, które należy wyznaczyć.

Oznaczmy wychylenie ruchomej płyty od położenia równowagi nienaładowanego kondensatora przez x. Odległość między płytami wynosić będzie więc $d - x$. Siłę przyciągania pomiędzy płytami można łatwo znaleźć obliczając energię zgromadzoną w kondensatorze w funkcji odległości płyt a następnie różniczkując ją po tej odległości. Znajdujemy $F_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 U^2 S/(d-x)^2$. Siła sprężystości proporcjonalna jest do wychylenia płyt, a zatem $F_2 = kx$. Warunek równowagi sił daje $F_1 = F_2$, a zatem:

$$kx = \frac{1}{2}\varepsilon_0 U^2 S/(d-x)^2$$

Jest to równanie, z którego należy obliczyć x, czyli wychylenie płyty od początkowego położenia.

Oznaczmy $\xi = x/d$, oraz $\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_0 U^2 S/kd^3$. Równanie opisujące wychylenie płyty sprowadza się do postaci

$$\xi(1-\xi)^2 = \mu.$$

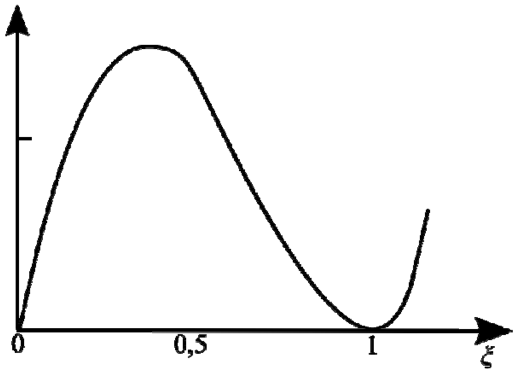
Przedyskutujmy rozwiązania tego równania w zależności od wartości stałej sprężystości. W tym celu zróbmy wykres funkcji $\xi(1-\xi)^2$ (rycina 1). Interesujący z powodów fizycznych jest obszar $0 < \xi < 1$.

Widzimy, że dla małych stałych sprężystości ($\mu \gg 1$) rozwiązań w ogóle nie ma. Oznacza to, że układ nie znajduje punktu równowagi, jedna płyta kondensatora spada w drugą.

Dla dużych stałych sprężystości ($\mu \ll 1$) położenie płyty nie powinno wiele różnić się od położenia tej płyty przy nienaładowanym kondensatorze. Sprężyna jest bowiem „twarda” i nie pozwala na znaczne wychylenie się płyty. Zatem rozwiązaniem na ξ powinna być mała liczba. W równaniu

$$\xi(1-\xi)^2=\mu$$

możemy pominąć wszystkie człony oprócz liniowego w ξ uzyskując $\xi \cong \mu$. Jest to przybliżone rozwiązanie równania trzeciego stopnia odpowiadające fizycznym warunkom. A zatem dla dużych stałych sprężystości położenie równowagi płyty przesunięte jest o $\frac{1}{2}\varepsilon_0 U^2 S/kd^3$ w stosunku do położenia płyty przy nienaładowanym kondensatorze.



Ryc. 1.

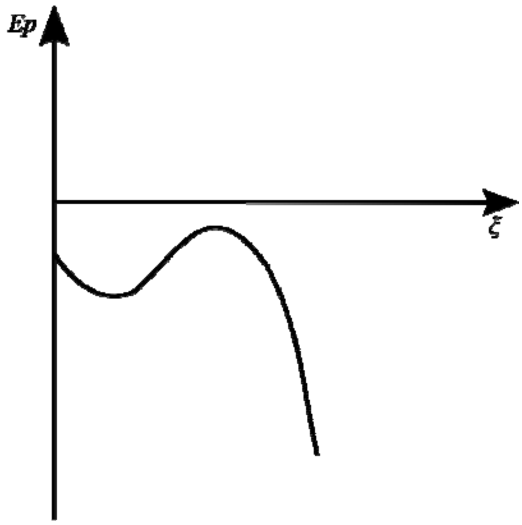
Aby szczegółowo przedyskutować przypadek pośrednich stałych sprężystości powróćmy do wykresu funkcji $\xi(1-\xi)^2=\mu$ przedstawionego na rycinie 1. Widzimy, że istnieją wartości μ którym odpowiadają (dla $\mu > 0$) trzy lub jeden pierwiastek ξ. Interesujący z powodów fizycznych jest, jak podane już było powyżej , obszar $0 < \xi < 1$ i wówczas, gdy $\mu < 4/27 \cong 0{,}1481$ mamy dwa rozwiązania, zaś dla $\mu = 4/27$ jedno, podczas gdy dla $\mu > 4/27$ rozwiązań w ogóle nie ma.

Obszar dużych i pośrednich stałych sprężystości scharakteryzowany jest warunkiem $\mu < 4/27 \cong 0{,}1481$. Równanie, zgodnie z wykresem, ma jedno rozwiązanie $\xi \cong \mu$ oraz drugie, dla wartości ξ znacznie różniącej się od μ. To pierwsze rozwiązanie znalezione zostało powyżej na podstawie uproszczonych rozwiązań. Pokażemy, że zachowanie układu jest zasadniczo różne w tych dwóch punktach.

Obliczmy energię potencjalną układu składającego się z kondensatora i sprężyny. Otrzymujemy:

$$E_p=\frac{2}{kd^2}\left[\xi^2-\frac{2\mu}{1-\xi}\right].$$

Wykres funkcji w nawiasie kwadratowym dla wartości $\mu < 4/27$ przedstawia rycina 2. Widać z niego, że energia potencjalna ma wprawdzie dwa ekstrema, odpowiadające dwóm położeniom równowagi znalezionym powyżej, ale tylko jedno z nich, odpowiadające mniejszemu x, odpowiada minimum energii, czyli równowadze trwałej. Drugie ekstremum odpowiada równowadze chwiejnej.



Ryc. 2.