XXXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1989/1990). Stopień I, zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Jan Mostowski: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1990.

Nazwa zadania: Wartość stosunku okresu drgań wahadła matematycznego o różnych amplitudach

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: wahadło matematyczne, ruch drgający, oscylator harmoniczny, okres drgań, amplituda, energia kinetyczna, potencjalna, zasada zachowania

Zadanie teoretyczne – T2, zawody I stopnia, XXXIX OF.

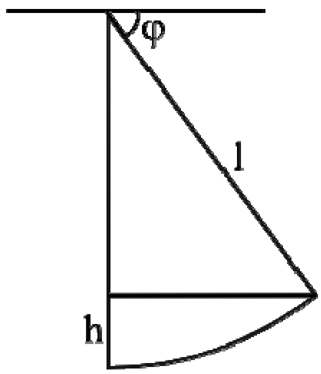
Znajdź przybliżoną wartość stosunku okresu wahadła matematycznego o amplitudzie drgań $\varphi = \pi/2$ do okresu drgań tego samego wahadła wykonującego drganie o małej amplitudzie.

Rozwiązanie

Istnieje bardzo wiele sposobów rozwiązania. Poniżej podajemy tylko jedno z możliwych rozwiązań.

Korzystamy z zasady zachowania energii (patrz rys. 1):

$$mgh + mv^2/2 = mgl.$$



Rys. 1.

W tym wzorze v oznacza chwilową wartość prędkości. Związana jest ona z chwilową wartością prędkości kątowej wzorem $v = \omega l$. A zatem

$$\omega^2 = (2g/l)\sin\varphi.$$

Ponieważ $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ to:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{l}\sin\varphi}\,.$$

Związek ten mówi nam, jak zmienia się kąt wychylenia φ w zależności od czasu t. Związek ten można też zapisać następująco

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\sin\varphi}}.$$

Ten ostatni wyraża czas dt jaki musi upłynąć, by kąt wychylenia wahadła zmienił się z φ na $\varphi + \mathrm{d}\varphi$. Można na podstawie tego związku wyznaczyć ćwierć okresu $T/4$. Jest to mianowicie taki czas, po którym wahadło zmieni kąt swojego wychylenia od 0 do $\pi/2$. A zatem:

$$T/4 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\sin\varphi}}$$

Jest to podstawowy nasz wynik. Można go jeszcze zapisać w postaci jawnie wykorzystującej wartość okresu T_0 tego wahadła wykonującego małe drgania:

$$T/T_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}$$

Zadanie sprowadza się teraz do przybliżonego obliczenia powyższej całki. Całka ta nie wyraża się przez funkcje elementarne i najlepiej jest w tym celu wykorzystać metody graficzne.

Należy być tu ostrożnym, gdyż funkcja podcałkowa jest osobliwa dla wartości argumentu równego zeru. Podzielmy więc obszar całkowania na dwa: pierwszy dla φ od 0 do pewnej małej liczby, na przykład 0,02 i drugi od 0,02 do $\pi/2$. W pierwszym obszarze można z dobrym przybliżeniem przyjąć: $\sin f = f$. Całka po pierwszym obszarze daje się wówczas wykonać elementarnie. Otrzymujemy.

$$T/T_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[2\sqrt{0{,}02} + \int_{0{,}02}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\right].$$

Ostatnią całkę można obliczyć graficznie wykonując wykres funkcji podcałkowej w podanych granicach na papierze milimetrowym i obliczając pole pod krzywą. W wyniku takiego rachunku otrzymano:

$$T/T_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(0{,}283 + 2{,}323) \cong 1{,}173\,.$$

Prawidłowym wynikiem, wziętym z tablic, z dokładnością do czterech znaków po przecinku jest:

$$T = 1{,}1803\ T_0$$

Widzimy więc, że zastosowana przez nas metoda graficzna daje wynik zadowalający.