XXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA (1984/1985). Stopień III, zad. teoretyczne – T2.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski, Andrzej Nadolny: *Fizyka w Szkole* Nr 6, 1985.

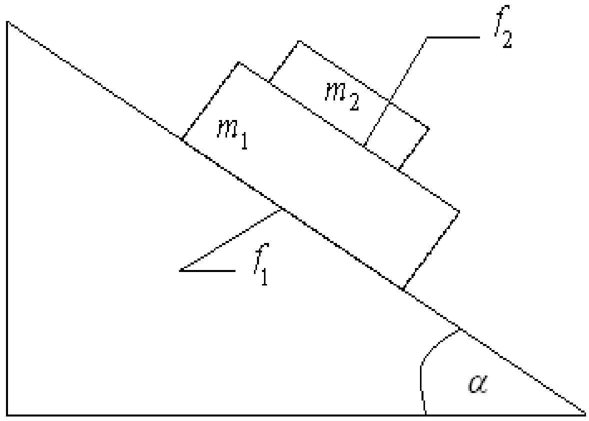
Nazwa zadania: Warunki ruchu 2 klocków znajdujących się na równi pochyłej.

Działy: Dynamika.

Słowa kluczowe: równia pochyła, współczynnik tarcia, tarcie, poślizg, zsuwanie, klocek.

Zadanie teoretyczne – T2, zawody stopnia III, XXXIV OF.

Na równi pochyłej o kącie nachylenia α znajduje się prostopadłościan o masie m_1, a na nim prostopadłościan o masie m_2 (ryc. 1). Oba prostopadłościany w chwili początkowej są nieruchome.



Ryc. 1.

Jakie warunki muszą spełniać współczynniki tarcia: f_1 – pierwszego prostopadłościanu o równię i f_2 – prostopadłościanów o siebie, aby

a) prostopadłościany pozostawały cały czas nieruchome,
b) pierwszy prostopadłościan był nieruchomy a drugi się po nim zsuwał,
c) oba prostopadłościany zsuwały się po równi, ale bez wzajemnego poślizgu,
d) oba prostopadłościany zsuwały się z dodatkowym poślizgiem.

Odpowiednie zakresy zmienności współczynników tarcia zaznacz jako obszary na płaszczyźnie odkładając na osiach f_1 i f_2.

Rozwiązanie

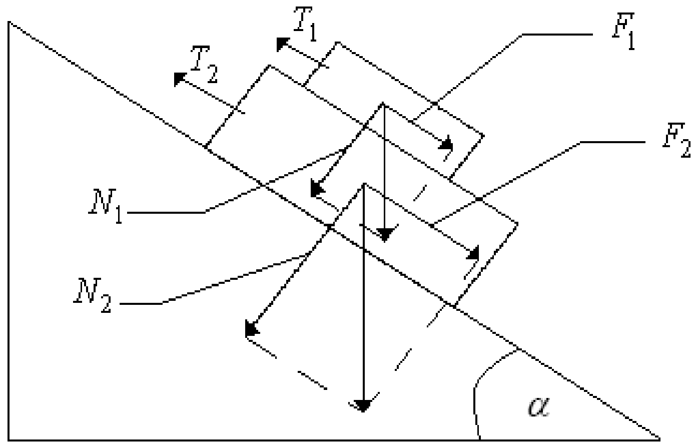
Oznaczenie pokazano na rycinie 2.
Mamy:

$$F_1 = m_1 g \sin\alpha, \qquad N_1 = m_1 g \cos\alpha,$$

$$F_2 = m_2 g \sin\alpha, \qquad N_2 = m_2 g \cos\alpha,$$

$$T_{1\max} = f_1 (N_1 + N_2)$$

$$T_{2\max} = f_2 N_2$$



Ryc. 2.

Znaczek max oznacza, że chodzi o maksymalną wartość odpowiedniej siły tarcia. Rozpatrzmy teraz poszczególne przypadki:

Przypadek a. (Oba ciała spoczywają)

Górny klocek nie porusza się przy spoczywającym dolnym wtedy, gdy

$$T_{2\max} \geq F_2$$

czyli gdy

$$f_2 \geq \mathrm{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Cały zaś układ nie porusza się względem równi gdy

$$T_{1\max} \geq F_1 + F_2,$$

skąd

$$f_1 \geq \mathrm{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Warunki (1) i (2) na wykresie pokazanym na ryc. 3 wyznaczają obszar oznaczony literą a.

Przypadek b. (Dolny klocek spoczywa, górny się zsuwa)

Warunek na zsuwanie się górnego klocka jest następujący (wtedy $t_2 = t_{2\max}$):

$$m_2 g \sin\alpha = F_2 > T_{2\max} = f_2 m_2 g \cos\alpha$$

czyli

$$f_2 < \mathrm{tg}\alpha \qquad (3)$$

Warunkiem na spoczywanie dolnego klocka jest by siła wypadkowa styczna do równi była równa zeru:

$$F_1 + T_{2\max} - T_1 = 0.$$

Stąd

$$T_1 = F_1 + T_{2\max},$$

ale

$$T_1 \leq T_{1\max},$$

zatem

$$f_1(m_1 + m_2) g \cos\alpha \geq m_1 g \sin\alpha + f_2 m_2 g \cos\alpha,$$

$$f_1 \geq \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathrm{tg}\alpha + \frac{m_2}{m_1+m_2} f_2 \ . \qquad (4)$$

Warunki (3) i (4) na wykresie z rys. 3 wyznaczają obszar zaznaczony literą b.

Przypadek c. (Obydwa prostopadłościany zsuwają się bez wzajemnego poślizgu)

Warunek na zsuwanie się obu prostopadłościanów po równi (jakby tworzyły jedno ciało) jest następujący

$$F_1 + F_2 > T_{1\max},$$

Skąd

$$f_1 < \mathrm{tg}\alpha. \qquad (5)$$

Zsuwające się ciała mają jednakowe przyspieszenie względem równi, przy czym $T_1 = T_{1\max}$. Wobec tego

$$\frac{F_1 + T_2 - T_{1\max}}{m_1} = \frac{F_2 - T_2}{m_2}.$$

Stąd wyznaczymy T_2:

$$T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{F_2}{m_2} - \frac{F_1}{m_1} + \frac{T_{1\max}}{m_1}\right) .$$

Ale

$$T_2 \leq T_{2\max},$$

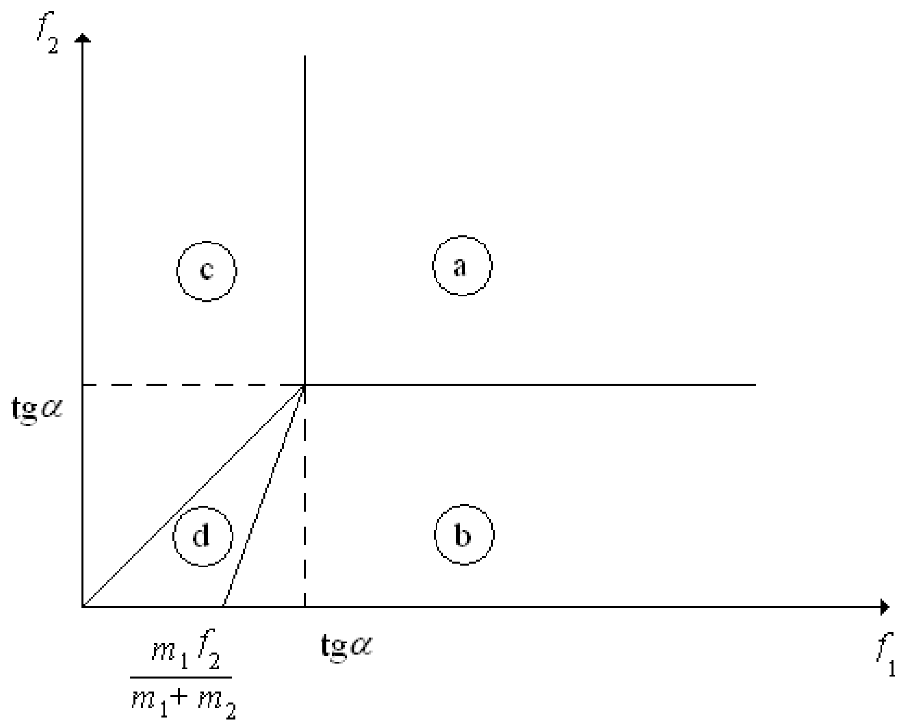
a więc

$$f_2 m_2 g \cos\alpha \geq \frac{m_1 m_2}{m_1}\left(g\sin\alpha - g\sin\alpha + f_1 \frac{m_1+m_2}{m_1}\cos\alpha\right) \qquad ,$$

skąd

$$f_2 \geq f_1 \qquad (6)$$

Warunki (5) i (6) na rycinie 3 wyznaczają obszar oznaczony literą c.



Ryc. 3.

Przypadek d. (Klocki zsuwają się z wzajemnym poślizgiem)

Przypadek ten można rozpatrywać podobnie jak poprzednie, ale można się obejść bez obliczeń. Wystarczy zauważyć, że przypadek ten zachodzi wtedy, gdy nie zachodzi żaden z przypadków przeanalizowanych do tej pory, a więc gdy:

$$f_2 < f_1 \tag{7}$$

$$f_1 < \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathrm{tg}\alpha + \frac{m_2}{m_1 + m_2} f_2 \ . \tag{8}$$

Warunki te wyznaczają na rycinie 3 obszar oznaczony literą d.

Proponowana punktacja

1. Prawidłowe przeanalizowanie i rozpatrzenie przypadku a.	do 2 pkt.
2. Prawidłowe przeanalizowanie i rozpatrzenie przypadku b.	do 2 pkt.
3. Prawidłowe przeanalizowanie i rozpatrzenie przypadku c.	do 2 pkt.
4. Prawidłowe przeanalizowanie i rozpatrzenie przypadku d.	do 2 pkt.
5. Wykonanie diagramu z zakresami zmienności współczynników tarcia dla poszczególnych podpunktów (ryc. 3).	do 2 pkt.

Uwagi

Zadanie powyższe było oceniane w ten sposób, że za każde z przypadków a – d przyznawano do 2 punktów. Pozostałe do dziesięciu dwa punkty przyznawano za zrobienie diagramu pokazanego na rycinie 3. Powyżej połowy punktów możliwych do zdobycia za to zadanie zdobyła około połowa zawodników (podobnie jak w poprzednim zadaniu). W rozwiązaniach sporo było błędów rachunkowych i logicznych. Dosyć duża część zawodników nie zrobiła diagramu mimo poprawnej analizy wszystkich przypadków.

Najbardziej rażącym błędem, popełnionym przez część zawodników, było wpisywanie równań ruchu dla obu klocków w postaci:

$$m_1 a_1 = F_1 + T_{2\max} - T_{1\max} \,,$$

$$m_2 a_2 = F_2 - T_{2\max} \,,$$

gdzie a_1 i a_2 oznaczają skierowane ku podstawie równi przyspieszenia odpowiednich klocków. Taka forma równań ruch na ogół jest niepoprawna. Tylko bowiem w ostatnim przypadku siły tarcia T_1 i T_2 osiągają (obie) swe maksymalne wartości. W ogólnym przypadku do równań ruchu nie można od razu maksymalnej siły tarcia bo prowadzi to do niedorzeczności. Na przykład w przypadku a drugie równanie po wstawieniu odpowiednich wyrażeń na F_2 i $T_{2\max}$ daje

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\alpha - f_2 m_2 g \cos\alpha$$

czyli

$$a_2 = g\cos\alpha\,(\mathrm{tg}\alpha - f_2).$$

Widać, że dla dostatecznie małych kątów α (a konkretnie takich, że tgα < f_2), klocek o masie m_2 doznawał by przyspieszenia „w górę” równi, co jest niezgodne z prawami fizyki i ze zdrowym rozsądkiem. Oczywiście przyczyną tej niedorzeczności jest przyjęcie, że siła tarcia cały czas ma wartość maksymalną równą iloczynowi współczynnika tarcia i siły nacisku.