

**XXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1983/1984). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2.****Źródło:** Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;

Waldemar Gorzkowski, Andrzej Nadolny: Fizyka w Szkole nr 4, 1984

**Nazwa zadania:** Pewna własność oporu zastępczego określonego układu  $n$  oporników.**Działy:** Prąd stały**Słowa kluczowe:** opornik, opór zastępczy, sieć, prawa Kirchhoffa, moc układu, węzły, potencjał**Zadanie teoretyczne – T2, zawody teoretyczne stopnia III, XXXIII OF.**

Dany jest układ  $n$  oporników  $R_i$  połączonych w określony sposób. Wykaż, że opór zastępczy rozważanego układu jest niemalejącą funkcją każdej z wartości  $R_i$ .

**Rozwiązanie**

Nie trudno zauważyć, że powyższe zadanie łatwo sprowadzić do zadania następującego: Do dowolnej sieci oporników omowych z dopływem prądu w punkcie  $A$  i odpływem w punkcie  $B$  dołączono dowolną ilość dodatkowych oporników. Udowodnij, że w wyniku takiej operacji opór  $R_{AB}$  nie mógł wzrosnąć. Badanie oporu łatwo sprowadzić do badania mocy wydzielanej w układzie:

$$M = \frac{(U_B - U_A)^2}{R_{AB}},$$

gdzie  $U_A$  i  $U_B$  są ustalonymi potencjałami w punktach  $A$  i  $B$ . Jeżeli udowodnimy, że po dołączeniu dodatkowych oporników moc nie zmaleje, to tym samym udowodnimy, że opór nie wzrośnie.

Moc wydzielana po dołączeniu oporów składa się z dwóch części – mocy wydzielanej na nowych opornikach i mocy wydzielanej na opornikach starej sieci, ale przy nowych napięciach w jej węzłach.

Wprowadzimy oznaczenia:

$I = 0, 1, 2, \dots, N, N+1$  – numery węzłów sieci, przy czym  $A = 0$  a  $B = N + 1$ .  $i = 0$

oraz  $i = N + 1$  odpowiadają punktom przyłożenia napięcia z zewnątrz. Są to węzły „zewnątrzne”. Pozostałe węzły możemy nazwać węzłami „wewnętrznymi”,

$U_i$  – napięcie w węźle  $i$ -tym,

$\sigma_{ij} = 1/R_{ij}$  – jeżeli węzeł  $i$ -ty starej sieci jest połączony z węzłem  $j$ -tym oporem  $R_{ij}$ ,

$\sigma_{ij} = 0$  – jeżeli węzły te nie są bezpośrednio połączone oporem,

$\tilde{U}_i = U_i + \varepsilon_i$  – nowe napięcia w węzłach starej sieci po dołączeniu dodatkowych oporników.

Oczywiście  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0$ .

Obliczamy nową moc wydzielaną na starej sieci:

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{i=0}^{N+1} \sigma_{ij} (U_i + \varepsilon_i - U_j - \varepsilon_j)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum \sum \sigma_{ij} (U_i - U_j)^2 + \frac{1}{2} \sum \sum \sigma_{ij} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2 + \sum \sum \sigma_{ij} (U_i - U_j)(\varepsilon_i - \varepsilon_j).\end{aligned}$$

Z trzech członów po prawej stronie pierwszy oznacza starą moc, a drugi nieujemny przyrost. Wykażemy teraz, że ostatni człon (liniowy w  $\varepsilon_i$  i  $\varepsilon_j$ ) jest równy zero.

Mamy:

$$\sum \sum \sigma_{ij} (U_i - U_j)(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \sum \sum \sigma_{ij} \cdot (U_i - U_j) \varepsilon_i - \sum \sum \sigma_{ij} \cdot (U_i - U_j) \varepsilon_j = S_1 - S_2.$$

Korzystając z przemienności sumowania obliczamy pierwszą sumę podwójną  $S_1$  wykonując sumowanie najpierw po  $j$  a potem po  $i$ :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon_i \sum_{j=0}^{N+1} \sigma_{ij} (U_i - U_j).$$

Ponieważ  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0$ , więc w  $S_1$  sumowanie po  $i$  możemy ograniczyć do węzłów wewnętrznych:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sum_{j=0}^{N+1} \sigma_{ij} (U_i - U_j).$$

Z prawa Kirchhoffa (o zerowej sumie prądów wpływających do danego węzła) mamy

$$\sum_{j=0}^{N+1} \sigma_{ij} (U_i - U_j) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

Zatem

$$S_1 = 0.$$

W podobny sposób dowodzi się, że  $S_2 = 0$ .

Wobec tego

$$\tilde{M} = M + \frac{1}{2} \sum \sum \sigma_{ij} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2 \geq M.$$

Ponieważ

$$\frac{(U_A - U_B)^2}{R_{AB}^{nowe}} = \tilde{M} \geq M = \frac{(U_A - U_B)^2}{R_{AB}^{stare}},$$

więc

$$R_{AB}^{nowe} \leq R_{AB}^{stare}$$

co kończy dowód.