XXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA(1983/1984), Stopień I, zadanie teoretyczne - T3.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski, Andrzej Nadolny: Fizyka w Szkole, nr 1, 1985.

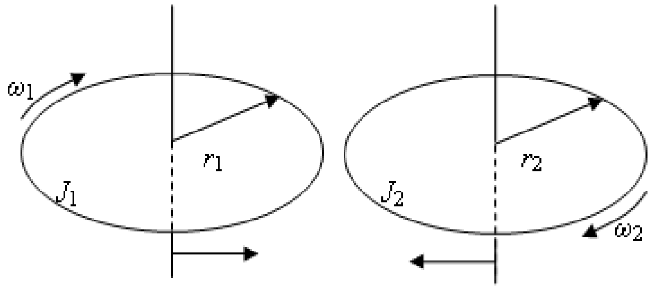
Nazwa zadania: Wyrównywanie szybkości podczas zetknięcia się 2 kół – zachowanie wielkości

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: moment pędu, bezwładności, symetria obrotowa, prędkość kątowa, tarcie potoczyste, energia.

Zadanie teoretyczne – T3, zawody stopnia I, XXXIII OF.

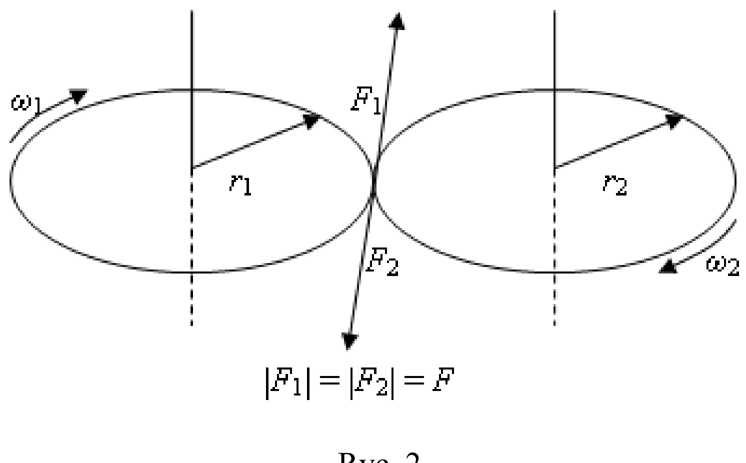
Dwa koła o promieniach r_1 i r_2 oraz momentach bezwładności względem własnych osi symetrii obrotowej I_1, I_1 i I_2, obracające się bez tarcia z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2 wokół pionowych osi stykamy obwodami doprowadzając do zrównania prędkości obwodowych (ryc. 1). Wprowadź wielkość fizyczną, która jest zachowana podczas tego procesu. Oblicz zmianę energii kinetycznej układu w szczególnym przypadku, gdy jedno z kół początkowo się nie obraca. Tarcie potoczyste zaniedbujemy.



Ryc.1

Rozwiązanie

W punkcie styczności kół działają na koła siły tarcia. Siły te są równe co do wartości bezwzględnej lecz przeciwnie skierowane. Kierunki tych sił są styczne do kół w punkcie ich wzajemnego stykania się, co pokazano na ryc. 2



Ryc. 2

Siły te powodują zmiany momentów pędu kół dane wzorami:

$$\Delta J_1 = F_1 r_1 \Delta t = F r_1 \Delta t\,,$$

$$\Delta J_2 = -F_2 r_2 \Delta t = F_1 r_2 \Delta t = F r_2 \Delta t\,, \tag{1}$$

zatem

$$\frac{\Delta J_1}{r_1} - \frac{\Delta J_2}{r_2} = 0\,. \tag{2}$$

Stąd

$$\Delta \frac{J_1}{r_1} - \Delta \frac{J_2}{r_2} = 0\,. \tag{3}$$

Czyli

$$\frac{J_1}{r_1} - \frac{J_2}{r_2} = const. \tag{4}$$

Warto zwrócić uwagę na to, że w rozważanym układzie całkowity moment pędu nie zachowuje się. Układ bowiem nie jest izolowany, działają w nim na osie siły zewnętrzne równoważące siły reakcji i utrzymujące te osie nieruchomo.

Posługując się znalezionym prawem zachowania obliczamy zmianę energii kinetycznej układu w przypadku podanym w tekście zadania.

Wprowadzamy oznaczenia: ω_p – prędkość kątowa pierwszego koła na początku (prędkość kątowa drugiego koła jest wtedy równa zeru), ω_1 – prędkość końcowa pierwszego koła, ω_2 - prędkość końcowa drugiego koła. Mamy $\omega_1 r = -\omega_2 r$ (brak poślizgu na końcu),

$$\frac{I_1 \omega_p}{r_1} = \frac{I_1 \omega_1}{r_1} - \frac{I_2 \omega_2}{r_2}, \tag{5}$$

(ze znalezionej zasady zachowania).
Stąd

$$\frac{l_1 \omega_p}{r_1} = \frac{l_1 \omega_1}{r_1} + \frac{l_2 \omega_2}{r_2^2} = \frac{l_1 \omega_1}{r_1}\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\frac{r_1^2}{r_2^2}\right), \tag{6}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_p}{1 + \frac{l_2}{l_1}\frac{r_1^2}{r_2^2}}, \tag{7}$$

$$\omega_2 = -\frac{\omega_1 r_1}{r_2}. \tag{8}$$

Szukana zmiana energii kinetycznej wynosi więc:

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\left[\left(l_1 \omega_1^2 + l_2 \omega_2^2\right) - l_1 \omega_p^2\right] = \frac{E_{\mathrm{pocz}}}{1 + \frac{l_2}{l_1}\frac{r_2^2}{r_1^2}}\,, \tag{9}$$

gdzie E_{pocz} oznacza energię kinetyczną układu na początku:

$$E_{\mathrm{pocz}} = \frac{1}{2} I_1 \omega_p^2\,. \tag{10}$$

Proponowana punktacja

1. Wyprowadzenie zasady zachowania	5 pkt.
2. Wyznaczenie ω_1 i ω_2	3 pkt.
3. Wyznaczenie ΔE_{kin}	2 pkt.