

XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA (1982/1983). Stopień III, zadanie doświadczalne – D

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Fizyka w szkole* nr 5, 1983.

Nazwa zadania: Wyznaczanie częstotliwości poprzecznych drgań własnych pręta.

Działy: Mechanika, akustyka

Słowa kluczowe: analiza wymiarowa, moduł Younga, gęstość, częstotliwość, generator drgań sinusoidalnych, papier logarytmiczny, milimetry, elektromagnes, cewka, magnes, pręt.

Zadanie doświadczalne – D, zawody III stopnia, XXXII OF.

Masz do dyspozycji:

- 3 pręty stalowe o znanych średnicach d_1, d_2, d_3 ;
- generator drgań sinusoidalnych, o częstotliwości 10 Hz – 20 kHz;
- elektromagnes, którego cewka nawinięta została na magniesie trwałym;
- uchwyt do mocowania prętów;
- statyw do elektromagnesu;
- papier logarytmiczny oraz papier milimetry.

Posługując się analizą wymiarową i wynikami pomiarów wyznacz, łącznie ze współczynnikami liczbowymi, jak częstotliwości trzech najniższych poprzecznych drgań własnych pręta zależą od modułu Younga – E , gęstości – ρ , średnicy – d , długości pręta – l (mierzonej od punktu zamocowania); $E = (200 \pm 5) \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = (7,87 \pm 0,01) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $d_1 = (2,30 \pm 0,02) \text{ mm}$, $d_2 = (1,61 \pm 0,02) \text{ mm}$, $d_3 = (0,96 \pm 0,02) \text{ mm}$.

Rozwiązanie**Część teoretyczna**

Zgodnie z warunkami zadania należy zastanowić się, jakie wnioski można wyciągnąć z analizy wymiarowej problemu.

Częstość drgań poprzecznych pręta f , zależy od następujących wielkości:

E – modułu Younga o wymiarze $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$, ρ – gęstości o wymiarze $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, l – długości pręta o wymiarze (m), d – jego średnica o wymiarze (m).

Można założyć, że wzór na częstość drgań poprzecznych pręta ma postać:

$$F_n = A_n E^\alpha \rho^\beta l^\gamma d^\varphi,$$

gdzie A_n – współczynnik liczbowy różny dla każdej z częstości. Ponieważ f ma wymiar s^{-1} , można napisać

$$\frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{kg}^\alpha}{\text{m}^\alpha \text{s}^{2\alpha}} \cdot \frac{\text{kg}^\beta}{\text{m}^{3\beta}} \text{m}^\gamma \text{m}^\varphi.$$

Stąd otrzymamy następujące związki

$$\alpha + \beta = 0$$

$$2\alpha = 1$$

$$\alpha + 3\beta = \gamma + \varphi.$$

Rozwiązując układ równań mamy

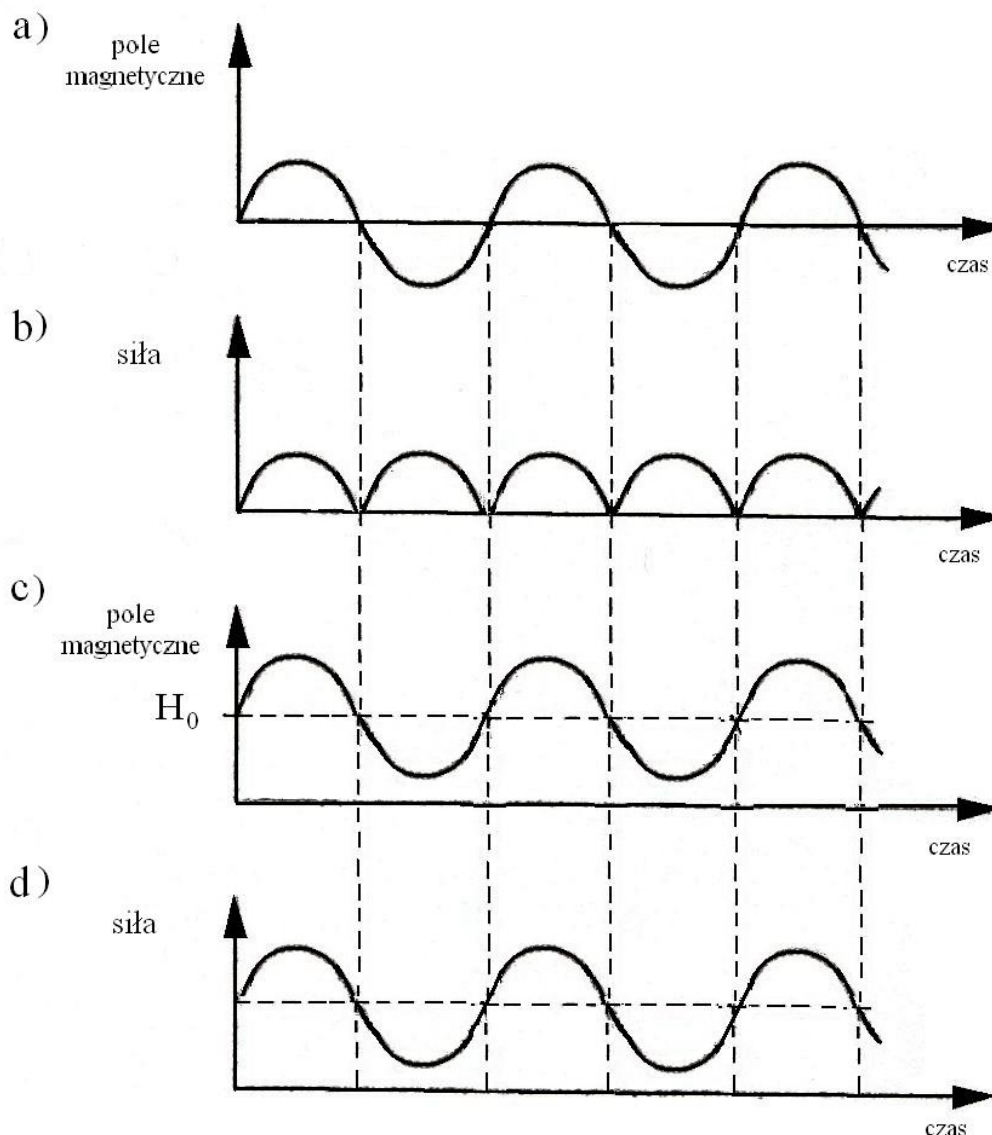
$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = -\frac{1}{2}; \quad \gamma + \varphi = -1.$$

Widać, że korzystając jedynie z analizy wymiarowej, nie można znaleźć zależności częstości f od wielkości l oraz d . Można jedynie uzyskać informację, że ostateczny wzór ma postać:

$$f_n = A_n \sqrt{\frac{E}{\rho}} y(l, d)$$

a postać funkcji $y(l, d)$ o wymiarze m^{-1} można uzyskać na podstawie danych doświadczalnych, badając zależność częstości f pręta od średnicy pręta i jego długości.

Do tego momentu zadanie wykonało ponad 70% zawodników. Jednakże, niektórzy uważali, że mogą z analizy wymiarowej otrzymać ostateczną postać wzoru. Prowadziło to do błędnych wzorów.



Rys. 1

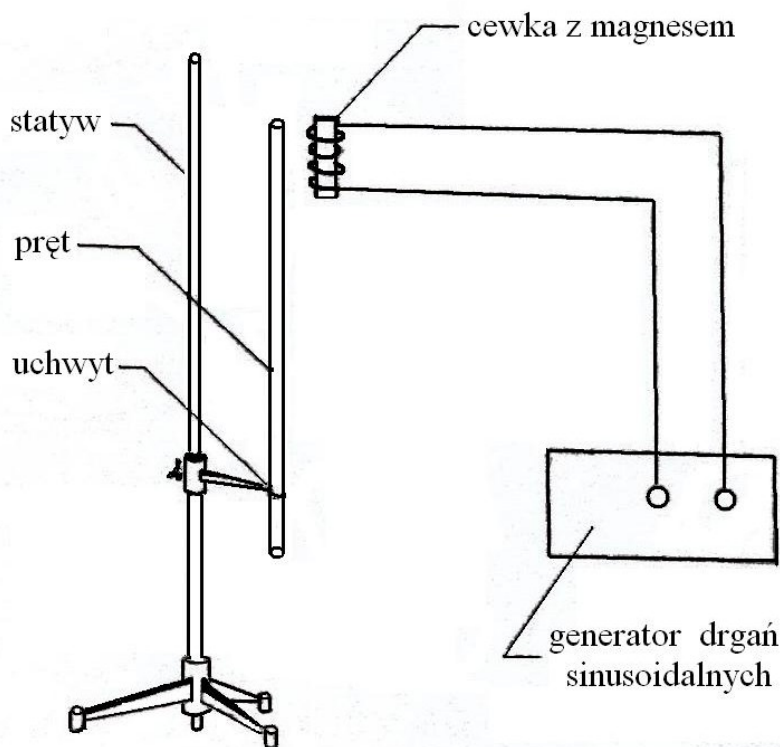
Przy prawidłowym rozwiązaniu należało po otrzymaniu zależności (1) przejść do wykonania doświadczenia, tzn. przeprowadzenia pomiarów i wyznaczenia częstości własnych pręta w zależności od jego grubości i długości. Należało do tego wykorzystać zjawisko rezonansu.

Wiadomo, że jeżeli częstość siły wymuszającej drgania będzie równa częstości drgań własnych pręta, to można zaobserwować dużą amplitudę drgań. Siłą wymuszającą będzie w tym przypadku siła przyciągania ferromagnetycznego (pręt jest żelazny) przez elektromagnes. Warto podkreślić, że ferromagnetyk jest zawsze przyciągany przez elektromagnes niezależnie od zwrotu pola magnetycznego (a nie jak twierdzili niektórzy zawodnicy raz przyciągany a raz odpychany). Gdyby rdzeń elektromagnesu nie był magnesem trwałym sinusoidalny prąd zmienny wywołałby w nim pole magnetyczne jak na Rys. 1 a), a to z kolei oddziaływałoby na pręt siłą jak na Rys. 1 b). Widać więc, że siła nie miałaby przebiegu sinusoidalnego, a jej częstość wynosiłaby 2ω , jeżeli częstość prądu z generatora wynosi ω . Natomiast ponieważ do pola elektromagnesu dodawało się pole H_0 pochodzące od magnesu (Rys. 1 c) przebieg siły pozostawał sinusoidalny (Rys. 1 d).

Tylko kilku uczniów opisało prawidłowo siłę wymuszającą, mimo, że ten temat poruszany był już kilka lat temu w zadaniu finałowym ze struną.

Część doświadczalna

Zestaw doświadczalny był prosty. Do zamocowanego w uchwycie pręta należało zbliżyć elektromagnes podłączony do generatora (Rys. 2). Odległość rdzeń elektromagnesu – pręt powinna być jak najmniejsza, ale jednocześnie dostatecznie duża, aby rdzeń elektromagnesu nie przyciągał pręta na stałe. Cewkę elektromagnesu (otwarta słuchawka telefoniczna starego typu) należało dołączyć do generatora sygnału sinusoidalnego. Następnie zmieniając częstotliwość należało doprowadzić do rezonansu.



Rys. 2

Rezonans dla I częstości był dobrze widoczny – obserwowano się silne wychylenie pręta. Warto zaznaczyć, że dla najcieńszego pręta można było w dużym przedziale częstości (kilku – kilkunastu Hz) obserwować drgania wymuszone, które jednak można było łatwo odróżnić od występujących dla określonej częstości drgań rezonansowych o wyraźnie większej amplitudzie.

Drgania rezonansowe II i III częstości podstawowej łatwo było wykryć dotykiem – przykładając palec do miejsca zamocowania pręta, lub też słuchem ze względu na wyraźny dźwięk

występujący w częstotliwości rezonansowej. Dla częstotliwości powyższej 1,5 kHz można było otrzymać dźwięk pochodzący od drgań wymuszonych występujący dla szerokich przedziałów częstotliwości ale znów łatwo go było odróżnić od częstotliwości rezonansowych.

Należało wykonać pomiary trzech najniższych częstotliwości rezonansowych dla wszystkich trzech prętów i różnych ich długości liczonej od punktu zamocowania. Przykładowe wyniki uzyskane przez jednego z uczniów podane są w tabeli 1.

Widać, że dla drgań poprzecznych pręta nie występują częstotliwości harmoniczne; to znaczy II częstotliwość i III częstotliwość nie jest równa 2ω lub 3ω , jeżeli I częstotliwość wynosi ω .

Wielu uczniów korzystając z analogii z drganiami słupa powietrza lub struny, twierdziło, że częstotliwości harmoniczne występują i niektórzy nawet próbowali naciągnąć wyniki pomiarów, aby udokumentować swoją teorię.

Tabela 1

Długość pręta l , m	$d_1 = 2,30$ mm			$d_2 = 1,61$ mm			$d_3 = 0,96$ mm		
	Częstotliwość			Częstotliwość			Częstotliwość		
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
0,30	16	110	307	10,5	77	220	6,8	48	128
0,25	25	158	430	17,5	110	305	11,1	68	193
0,20	37	240	670	26,5	173	470	16,5	108	290
0,15	63	390	1170	45	290	800	28,5	185	500
0,10	135	860	2450	105	670	1930	64	405	1200
0,05	560	3500	----	400	2750	8000	250	1620	5100

Aby otrzymać zależności f od l i d najłatwiej było wykreślić te zależności na papierze logarytmicznym. Przy założeniu, że $f \sim l^\gamma$ oraz $f \sim d^\varphi$ z wykresów

$$\log f = \gamma \log l + B \quad (3)$$

oraz

$$\log f = \varphi \log d + C \quad (4)$$

Łatwo odczytać γ i φ oraz określić błąd tych wykładników. Okazało się, że:

$$\gamma = -2 \text{ oraz } \varphi = 1.$$

Oczywiście można było tylko wyznaczyć jedynie γ lub φ i skorzystać ze związku $\gamma + \varphi = -1$.

Następnym krokiem było wyliczenie A_1, A_2, A_3 . Ponieważ postać wzoru:

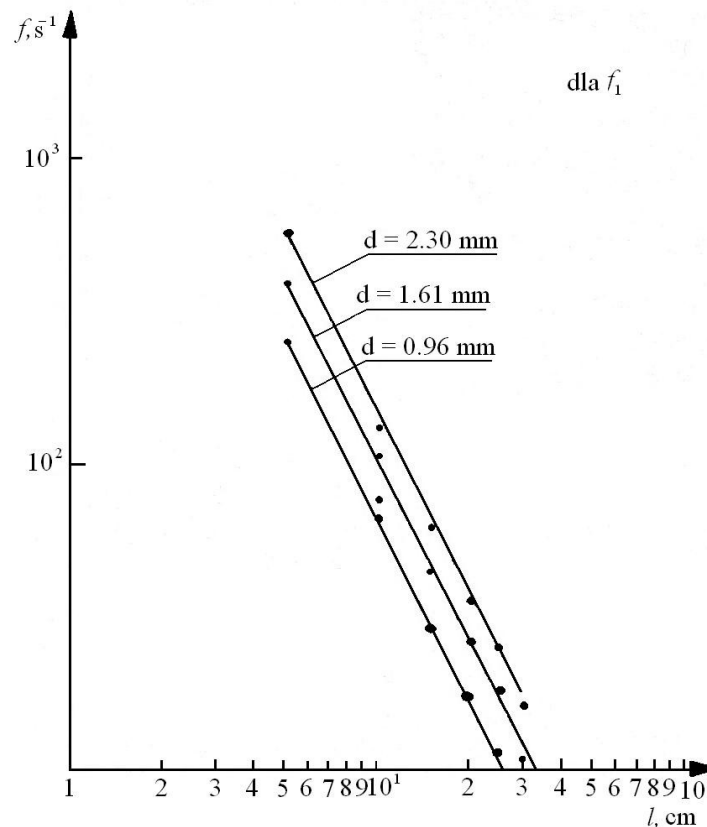
$$f = A \frac{d}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

była już znana, rachunek był prosty i otrzymano:

$$A_1 \approx 0,195 \pm 0,015,$$

$$A_2 \approx 0,84 \pm 0,02,$$

$$A_3 \approx 2,37 \pm 0,06.$$



Rys. 3

Łatwo odczytać γ i φ oraz określić błąd tych wykładników. Okazało się, że:

$$\gamma = -2 \quad \text{oraz} \quad \varphi = 1.$$

Oczywiście można było tylko wyznaczyć jedynie γ lub φ i skorzystać ze związku $\gamma + \varphi = -1$. Następnym krokiem było wyliczenie A_1, A_2, A_3 . Ponieważ postać wzoru:

$$f = A \frac{d}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

była już znana, rachunek był prosty i otrzymano:

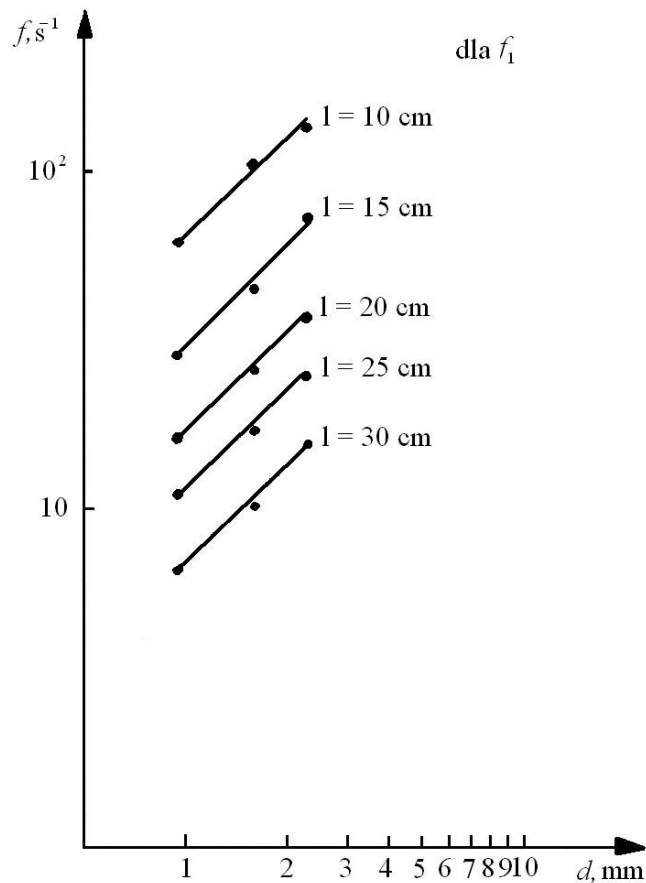
$$A_1 \approx 0,195 \pm 0,015,$$

$$A_2 \approx 0,84 \pm 0,02,$$

$$A_3 \approx 2,37 \pm 0,06.$$

Niepewność pomiarową można było obliczyć graficznie lub metodą różniczeki zupełnej, zakładając, że dokładność pomiaru częstotliwości f odpowiada jednej działce skali generatora (rozrzut pomiarów przy badanej częstotliwości rezonansowej nie przekraczał jednej działki), a dokładność pomiaru l wynosi 1 mm.

Można też było wyznaczyć niepewność pomiarową z rozrzutu wielkości A obliczonych dla różnych l oraz d .



Rys. 4.

Jak widać stosunek $A_2/A_1 \approx 6,24$ i $A_3/A_1 \approx 17,6$ a więc nie ma mowy o częstościach harmonicznym. Wynika to z faktu, że równanie falowe drgań poprzecznych pręta nie jest równaniem różniczkowym II rzędu (tak jak np. dla drgającej struny) tylko równaniem IV rzędu. (zainteresowanych odsyłamy do podręcznika S. Szczeniowskiego *Fizyka doświadczalna* t. I, str. 620). Oczywiście rozwiązanie takiego równania, a nawet jego zapisanie przekracza znacznie możliwości uczniów i nie było wymagane. Natomiast przybliżone rozwiązania uczniowskie prowadzące do równań II rzędu były nieprawidłowe.

Ogólnie rozwiązanie wypadło dość słabo. Jedynie 6 uczniów uzyskało oceny powyżej 16 punktów (na 20 możliwych), a 31 powyżej 10 pkt. Aż 20 uczniów stwierdziło, że występują częstości harmoniczne.