

XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA (1982/1983). Stopień II, zadanie doświadczalne – D

Źródło:	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: <i>Fizyka w Szkole</i> nr 4, 1983.
Nazwa zadania:	Wyznaczanie masy lejka i ciężarka.
Działy:	Hydrostatyka
Słowa kluczowe:	masa, gęstość, parcie, ciśnienie, woda, ciężar, lejek, ciężarek, menzurka.

Zadanie doświadczalne – D, zawody II stopnia, XXXII OF.

Wyznacz masę lejka oraz ciężarka (gęstości ciężarka i lejka są nieznane). Gęstość wody wynosi 1 g/cm^3 .

Zestaw doświadczalny:

1. lejek,
2. płaska szyba,
3. metalowy ciężarek,
4. menzurka,
5. naczynie z wodą,
6. kuweta lub taca (chroni przed zalaniem pracowni),
7. papier milimetrowy,
8. klej (do przyklejenia papieru milimetrowego).

Rozwiązanie

Do doświadczenia przygotowano lejek szklany o średnicy przy podstawie około 10 cm (masa lejka około 100 g), szklaną płytkę o wymiarach około 15 cm x 15 cm, ciężarek z otworem o masie ok. 50 g (np. nakrętka o takiej średnicy wewnętrznej, żeby weszła na rurkę lejka). Powierzchnia krawędzi górnej lejka była doszlifowana proszkiem w taki sposób, aby lejek położony na szybie dał się napełnić wodą do pewnego określonego poziomu.

Lejek stawiamy na poziomej szybie i zaczynamy powoli wypełniać go wodą. Woda wywiera na podłoże parcie, które rośnie wraz ze wzrostem wysokości słupa wody zawartej w lejku. Przy pewnym poziomie wody h , obserwujemy płynięcie lejka spowodowane silnym zmniejszeniem oporu ruchu lejka po podłożu – znika tarcie między lejkiem a płytką. Przy odpowiednim doszlifowaniu krawędzi lejka wartość h jest dobrze określona.

Wtedy suma ciężaru lejka i ciężaru zawartej w nim wody równa jest całkowitemu parciu wody na powierzchnie podstawy lejka.

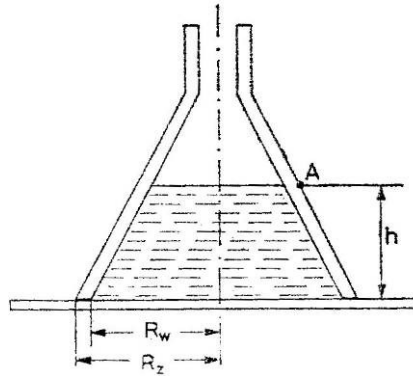
Parcie Q na całej wewnętrznej powierzchni podstawy lejka równe jest iloczynowi ciśnienia wody p_w przez powierzchnię:

$$Q = p_w \cdot R_w^2 \pi \quad (1)$$

gdzie R_w – promień wewnętrznej podstawy lejka (rys. 1). Ciśnienie na tej powierzchni wynosi

$$p_w = \rho_w \cdot g \cdot h \quad (2)$$

gdzie: ρ_w – gęstość wody, g – przyspieszenie ziemskie, h – wysokość słupa wody w lejku, przy której następuje „płynięcie” lejka.



Rys.1.

Jeżeli założymy, że pod brzegiem lejka wzdłuż promienia jego podstawy od R_w do R_z ciśnienie zmienia się liniowo od wartości p_w do zera, to dodatkowe parcie wody (Q') między brzegiem lejka a płytką będzie wynosiło:

$$Q' = (\pi R_z^2 - \pi R_w^2) \frac{P_w}{2}. \quad (3)$$

Całkowite parcie wody na powierzchnię podstawy lejka wynosi więc $Q + Q'$ i równe jest sumie ciężarów: lejka P_L i zawartej w nim wody P_w stąd:

$$Q + Q' = P_L + P_w. \quad (4)$$

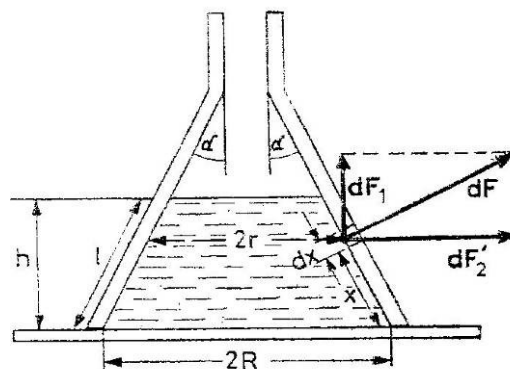
Korzystając z zależności (1) (2) (3) otrzymamy:

$$\left[\pi R_w^2 + \left(\frac{\pi R_z^2}{2} - \frac{\pi R_w^2}{2} \right) \right] \rho_w g h = P_L + P_w \quad (5)$$

$$P_L = \pi \rho_w g h \cdot \left(\frac{R_z^2 + R_w^2}{2} \right) - P_w$$

Do innej metody otrzymania wzoru na wyznaczenie ciężaru lejka, przy zastosowaniu danego układu pomiarowego, prowadziło stwierdzenie, że w momencie pływania lejka, przy pewnej wysokości h wody zawartej w lejku, składowa pionowa siły parcia wywieranego przez wodę zrównoważy ciężar lejka. (Składowe poziome siły parcia równoważą się ze względu na symetrię układu). Należało więc obliczyć składową pionową siły i parcia wywieranego przez wodę na element ds ścianki lejka i scałkować po całej powierzchni lejka.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rys. 2.



Rys.2.

Rozpatrujemy element powierzchni lejka o szerokości dx , położony w odległości x (liczonej wzdłuż tworzącej stożka) od krawędzi lejka przylegającej do szyby.

Całkowite parcie wody na ten element powierzchni wynosi:

$$dF = p \cdot ds \quad (6)$$

gdzie: p - ciśnienie słupa wody na wysokości $(l - x) \cos \alpha$, ds - element powierzchni. Ponieważ ciśnienie p wynosi:

$$p = \rho_w g (l - x) \cos \alpha \quad (7)$$

element powierzchni wynosi

$$ds = 2\pi r dx, \quad \text{gdzie: } r = R - x \cdot \sin \alpha, \quad (8)$$

więc:

$$dF = \rho_w g (l - x) \cos \alpha \cdot 2\pi (R - x \cdot \sin \alpha) dx \quad (9)$$

a składowa pionowa tej siły dF_1 wynosi:

$$\begin{aligned} dF_1 &= dF \cdot \sin \alpha = \\ &= 2\pi \rho_w g (l - x) \cos \alpha (R - x \cdot \sin \alpha) \sin \alpha \cdot dx \end{aligned}$$

Całkowita wartość składowej pionowej siły parcia wody na ściankę lejka wynosi wobec tego:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^l dF_1 = 2\pi \rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \int_0^l (R - x \sin \alpha)(l - x) dx = \\ &= 2\pi \rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \left[\int_0^l Rl dx - \int_0^l (R + l \sin \alpha)x dx + \int_0^l \sin \alpha x^2 dx \right] = \\ &= 2\pi \rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \left[Rl^2 - (R + l \sin \alpha) \frac{l^2}{2} + \sin \alpha \frac{l^3}{3} \right] = \\ &= 2\pi \rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \left[\frac{Rl^2}{2} - \frac{1}{6} l^3 \sin \alpha \right] \end{aligned}$$

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami $F_1 = P_L$. Stąd:

$$P_L = \pi \rho_w g \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot l^2 \left[R - \frac{1}{3} l \sin \alpha \right]. \quad (10)$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten jest równoważny wzorowi (5) przy założeniu, że $R_z = R_w$, tzn. przy zaniedbaniu grubości ścianek lejka.

Najczęstsze błędy popełniane przez zawodników, stosujących tę metodę wyprowadzenia wzoru to:

1. Wstawianie do wzoru na ciśnienie wody odległości elementu ds od poziomu płytki, a nie od poziomu cieczy.
2. Przy obliczaniu składowej pionowej siły parcia mnożenie „średniego” ciśnienia na powierzchni lejka przez powierzchnię boczną lejka. Takie postępowanie jest błędne, ponieważ jak widać z poprzednio wyprowadzonych wzorów, zależność dF od wysokości h nie jest liniowa.
3. Niezauważenie, że promień r elementu powierzchni ds , nie jest stały, ale zależy od x , wobec czego całkowanie z $r = R$ jako stałą.
4. Liczne omyłki przy rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych m.in. mylenie funkcji trygonometrycznych.
5. Błędy w całkowaniu.

Oznaczając masę lejka przez M_L otrzymujemy

$$M_L = \pi \rho_w \sin \alpha \cos \alpha \cdot l^2 \left[R - \frac{1}{3} l \sin \alpha \right] \quad (11)$$

lub zgodnie z wzorem (5) oraz z zależnością $h = l \cos \alpha$ otrzymamy:

$$M_L = \pi \rho_w l \cdot \cos \alpha \left(\frac{R_w^2 + R_z^2}{2} \right) - \frac{P_w}{g}. \quad (12)$$

Wzór (11) lub (12) pozwala wyznaczyć masę lejka i masę układu lejek + ciężarek na podstawie pomiaru długości oraz parametrów lejka tzn. R oraz kąta α lub pomiaru masy wody.

Wielkości l , R_w , R_z mierzono przy pomocy papieru milimetrowego. Aby ułatwić odczytanie poziomu cieczy na lejku naklejono wzdłuż tworzącej stożka pasek papieru milimetrowego spełniający rolę skali. Wewnętrzny i zewnętrzny promień krawędzi lejka łatwo było zmierzyć odciśkając zwilżony lejek na papierze milimetrowym.

Kąt α wyznaczano z pomiaru promienia i tworzącej części stożkowej lejka. Najskuteczniejszą metodą było zwiniecie stożka (nie ściętego) z papieru milimetrowego i wpasowanie go do wewnętrznej części lejka. Kąt α wyznaczano również poprzez pomiar objętości V cieczy wypełniającej całkowicie „kielich” lejka zgodnie z zależnością

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha, \quad (15)$$

stąd:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3V}{\pi R^3} \quad (16)$$

Masę wody (P_w/g) wyznaczono odmierzając odpowiednio objętość wody menzurką. Najłatwiej to wykonać w następujący sposób:

Trzymając lejek podstawą do góry i zatykając wylot palcem napełniamy lejek do punktu A (widocznego na rys. 1), a następnie mierzymy objętość wody potrzebną do napełnienia lejka po brzegi.

Opisane powyżej metody opierają się na obserwacji tego samego zjawiska i różnią się szczegółami otrzymywania odpowiednich wzorów lub wyborem mierzonych wielkości.

Proponowana punktacja

- | | |
|--|-----------|
| 1. Metoda pomiaru | do 4 pkt. |
| 2. Wyprowadzenie wzoru na P_L | do 5 pkt. |
| 3. Uwzględnienie poprawki Q' | do 4 pkt. |
| 4. Wykonanie pomiaru i prawidłowe wyniki | do 5 pkt. |
| 5. Pomiar parametrów lejka | do 2 pkt. |