XXXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1981/1982). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Kotlicki; Andrzej Nadolny: Fizyka w Szkole, nr 5, 1982;
Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska: Olimpiada Fizyczna XXIX – XXXI. WSiP, Warszawa 1986, str. 191 – 196.

Nazwa zadania: Spadający samochód – położenie w momencie upadku.

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: rzut poziomy, spadek, czas spadania, prędkość kątowa, bryła sztywna, moment sił, środek ciężkości, masy, energia kinetyczna, potencjalna, przyspieszenie kątowe, twierdzenia Steinera, moment bezwładności.

Zadanie teoretyczne – T2, zawody III stopnia, XXXI OF.

Samochód jedzie z prędkością υ = 40 km/h prostą, poziomą drogą, która urywa się równą, prostopadłą do kierunku drogi krawędzią nad przepaścią o głębokości h = 13 m. Jaka będzie pozycja samochodu w momencie uderzenia o dno przepaści, jeśli dane są:

- masa samochodu m = 840 kg
- odległość między przednią i tylną osią samochodu d = 2 m
- moment bezwładności samochodu względem osi poziomej, prostopadłej do kierunku ruchu i przechodzącej przez środek ciężkości, równoległy do obu osi samochodu $I = 750\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
- przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$

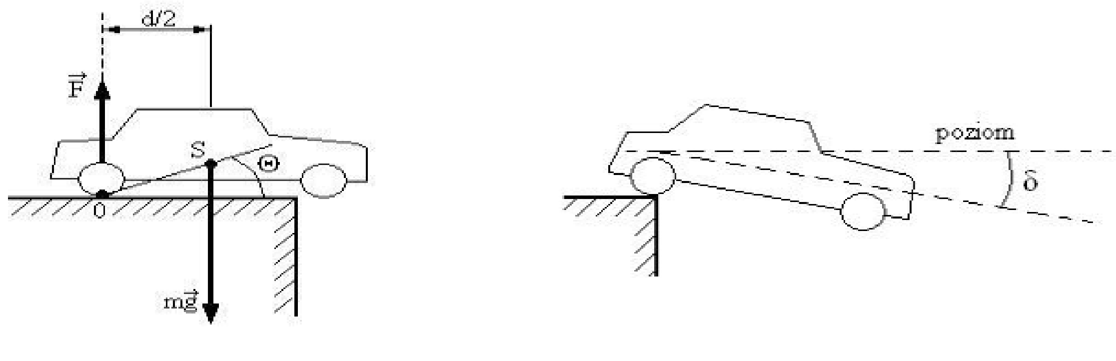
Czy wynik zależy od twardości resorów i jak (miarą tej twardości jest wielkość ugięcia resoru pod wpływem jednostkowej zmiany obciążenia samochodu)? Przyjmij, że masa kół jest bardzo mała w porównaniu z masą samochodu i zaniedbaj opór powietrza.

Rozwiązanie

Składowa pozioma prędkości środka masy samochodu pozostaje przez cały czas spadku równa υ. Spadający samochód przez czas

$$\Delta t = \frac{d}{\upsilon} \tag{1}$$

(Δt = 0,18 s) „wisi” przednimi kołami w powietrzu, podczas gdy tylne koła jeszcze dotykają podłoża (rys. 1a). Pod wpływem działania na samochód momentu siły, przez ten czas nabywa on prędkości kątowej ω, która dalej pozostaje stała.



a) b)

Rys. 1

Załóżmy wstępnie, że kąt δ o jaki samochód pochyli się w czasie Δt (rys.1b), jest tak mały, iż możemy przyjąć $\cos\delta = 1$. jak się okaże, założenie to jest dla podanego zestawu danych dobrze spełnione ($\delta = 5^\circ$, $\cos\delta = 0{,}996$).

Aby obliczyć prędkość kątową ω należy znać wartość siły $\boldsymbol{F}$ (rys. 1a), jaką podłoże poprzez resory działa na karoserię samochodu (masę kół się zaniedbuje); ramię działania tej siły względem środka masy jest znane. Aby wyznaczyć wartość siły $\boldsymbol{F}$ zastosujemy dwie różne, uproszczone metody.

1. Przybliżenie miękkich resorów

Ponieważ środek ciężkości samochodu jest równoległy do obu osi, wobec tego, w czasie jazdy po drodze, resory obu osi działają na karoserię jednakową siłą, równą dla każdej osi:

$$-\frac{1}{2}m\cdot\vec{g}.$$

Zakładamy, że w czasie Δt zmiana ugięcia tylnych resorów jest na tyle mała, iż siła $\vec{F}$ pozostaje przez ten czas praktycznie stała – taka, jaka była na drodze przed przepaścią, a więc

$$F = \frac{1}{2}mg.$$

Równanie ruchu obrotowego samochodu ma w tym przypadku postać:

$$I\cdot\varepsilon_{(1)} = \frac{1}{2}mg\frac{d}{2},$$

gdzie $\varepsilon_{(1))}$ oznacza przyspieszenie kątowe samochodu w tym przybliżeniu. Jest ono więc równe:

$$\varepsilon_{(1)} = \frac{mgd}{4I}. \tag{2}$$

2. Przybliżenie sztywnych resorów

Samochód traktujemy jako bryłę sztywną. Wypisujemy równanie ruchu środka masy:

$$ma = mg - F, \tag{3}$$

oraz równanie ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy:

$$I\cdot\varepsilon_{(2)} = F\frac{d}{2}, \tag{4}$$

gdzie $\varepsilon_{(2)}$ oznacza przyspieszenie kątowe samochodu w tym przybliżeniu. (Oba równania nie zależą od wysokości położenia środka masy samochodu względem płaszczyzny obu osi.) Przyspieszenia a oraz $\varepsilon_{(2}$ są powiązane ze sobą wzorem:

$$\alpha = \frac{d}{2}\varepsilon_{(2)}. \tag{5}$$

Z równań (3), (4), (5) wyznaczamy przyspieszenie kątowe samochodu:

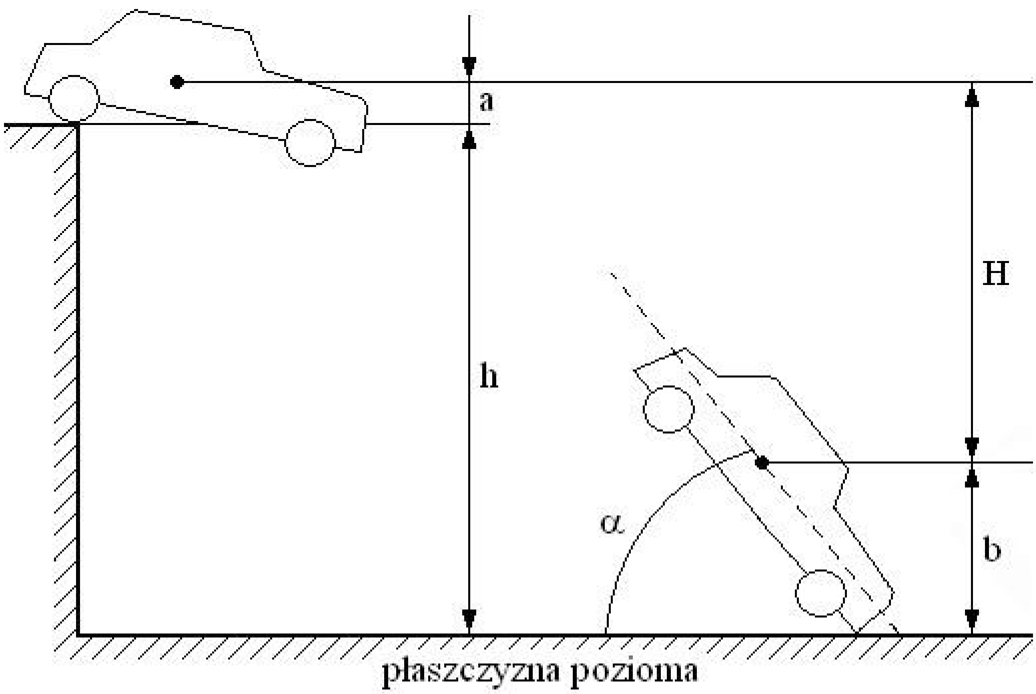
$$\varepsilon_{(2)} = \frac{2g}{d}\left(1+\frac{4I}{md^2}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Ostatni wzór można także otrzymać, posługując się wyznaczonym za pomocą twierdzenia Steinera momentem bezwładności samochodu względem osi tylnych kół i momentu siły ciężkości samochodu mg względem tej osi. Należy jednak zwrócić uwagę, że metoda ta bardzo się komplikuje, jeśli środek masy nie znajduje się na poziomie tej osi, bowiem układ związany z tylną osią nie jest wówczas układem inercjalnym.

Czas spadania samochodu - od chwili t_1 oderwania się tylnych kół od podłoża do chwili t_2 uderzenia o dno przepaści - wyraża się wzorem (spadek swobodny)

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \tag{7}$$

gdzie H jest różnicą poziomów środka masy samochodu, przebytą w czasie $t = t_2 - t_1$ (rys.2)



Rys. 2

Kąt α, jaki będzie tworzyła podłużna „oś” samochodu względem poziomu w chwili t_2, obliczamy jako:

$$\alpha = \delta + \omega \cdot t.$$

Ponieważ przyspieszenie kątowe ε jest w czasie Δt (dla obu przybliżeń) stałe, możemy napisać:

$$\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon(\Delta t)^2 + \varepsilon\,\Delta t \cdot t = \varepsilon\left[\frac{1}{2}(\Delta t)^2 + \Delta t \cdot t\right].$$

Po uwzględnieniu wzorów (1) i (7) mamy:

$$\alpha = \varepsilon\left(\frac{d^2}{2v^2} + \frac{d}{v}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right). \tag{8}$$

Podstawiając teraz do wzoru (8) wyrażenia (2) oraz (6) otrzymujemy odpowiednio dla dwóch przybliżeń:

$$\alpha_{(1)} = \frac{mgd^2}{4I\,v}\left(\frac{d}{2v} + \sqrt{\frac{2H}{g}}\right) \tag{9}$$

oraz

$$\alpha_{(2)} = \frac{2g}{v}\left(1+\frac{4I}{md^2}\right)^{-1}\left(\frac{d}{2v}+\sqrt{\frac{2H}{g}}\right). \tag{10}$$

Należy teraz przyjąć pewne założenia co do wielkości odcinków a i b (rys. 2). Sensownym wydaje się przyjęcie, że $b - a = 1$ m, wówczas $H = h - 1$ m = 12 m. Po podstawieniu tej wartości H do wzorów (9) i (10) uzyskujemy odpowiednio $\alpha_{(1)} = 93°$, $\alpha_{(2)} = 89°$. Wobec przybliżonego charakteru zadania (założenia upraszczające) można więc na podstawione w nim pytanie odpowiedzieć, że samochód w chwili uderzenia o dno przepaści będzie miał pozycję pionową (podstawienie $H = h$ nie zmieni istotnie tego wniosku).

Drugie pytanie zadania dotyczy wpływu twardości resorów. Widać, że dla podanego zestawu danych, miękkim resorom odpowiada większe przyspieszenie kątowe ω, a zatem i większy kąt α. Porównując jednak ze sobą wzory (2) i (6) możemy zauważyć, że wynik ten nie jest ogólnie słuszny, lecz zależy od wartości stosunku $\frac{4I}{md^2}$ (gdy jest on równy jedności, wzory (2) i (6) pokrywają się ze sobą). W naszym przypadku zachodzi $\frac{4I}{md^2} < 1$ i tylne resory ulegną w czasie Δt pewnemu rozprężeniu. Obliczenia (których wykonanie pozostawiamy Czytelnikowi) dają wynik, że resory rozprężą się w tym czasie o 1 cm; nie powinno to w znacznym stopniu zmienić siły ich oddziaływania na karoserię, która uniesie się nieco w górę.

W przypadku gdy $\frac{4I}{md^2} > 1$, tylne resory się ugną. Opisane efekty będą tym większe, im większa będzie różnica stosunku względem jedności. Zadanie to można także rozwiązać stosując przybliżenie bryły sztywnej i korzystając z prawa zachowania energii.

3. Rozwiązanie energetyczne (przybliżenie bryły sztywnej)

W czasie Δt, jaki upływa między oderwaniem się od „progu” przedniej i tylnej pary kół, następuje przyrost energii kinetycznej samochodu o wartość:

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{s}^2 + \frac{1}{2}I\omega_2 . \tag{11}$$

Pierwszy człon powyższego wyrażenia przedstawia energię kinetyczną związaną ze składową pionową v_s prędkości środka masy w chwili t_1 – (składowa pozioma v = const, zatem i energia jej odpowiadająca jest stała), drugi człon wyraża energię kinetyczną ruchu obrotowego względem środka masy.

Powyższy przyrost energii kinetycznej odbywa się kosztem energii potencjalnej środka masy. W czasie Δt energia ta ulega zmniejszeniu o wartość:

$$\Delta E_\mathrm{p} = mg\Delta h , \tag{12}$$

gdzie Δh oznacza obniżenie środka masy równe:

$$\Delta h = \frac{d}{2}\frac{\varepsilon(\Delta t)^2}{2} = \frac{d}{2}\omega\frac{\Delta t}{2} , \tag{13}$$

(zakładamy tu stałość przyspieszenia kątowego ε w czasie Δt). Ze wzorów (12) i (13) wynika, że:

$$\Delta E_\mathrm{p} = \frac{mgd\Delta t}{4} . \tag{14}$$

Znajdźmy teraz związek zachodzący między υ_s a ω. Jeśli środek masy S znajduje się na poziomie punktu O, w odległości $d/2$ od niego (rys. 1), związek ten ma postać:

$$\upsilon_s = \frac{d}{2}\omega . \tag{15}$$

Okazuje się jednak, że zależność (15) jest słuszna także wtedy, gdy kierunek OS tworzy z poziomem różny od zera kąt Θ, mamy bowiem (l – długość odcinka OS):

$$\frac{\upsilon_S}{\omega} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} : \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\Theta} = \frac{\mathrm{d}(l \cdot \sin\Theta)}{\mathrm{d}\Theta} = l \cdot \cos\Theta = \frac{d}{2} .$$

Po skorzystaniu z (15) wzór (11) przyjmuje postać:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{md^2}{4} + I\right)\omega^2 . \tag{16}$$

Z przyrównania $\Delta E_k = \Delta E_p$ po podstawieniu wyrażeń (14) i (16) otrzymujemy:

$$\omega = \frac{2g}{d}\left(1 + \frac{4I}{md^2}\right)^{-1} \Delta t .$$

co jest równoważne (6).

Uwagi

Często powtarzającym się błędem w rozwiązaniu energetycznym było nieuwzględnienie w wyrażeniu na ΔE_k członu $\frac{m\upsilon_s^2}{2}$.