XXXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1981/1982). Stopień I – zadanie doświadczalne – D2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Kotlicki, A. Nadolny, K. Pniewska: *Fizyka w Szkole* nr 2, 1982;
Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska: Olimpiady Fizyczne XXIX – XXXI, WSiP, Warszawa 1986, str. 172–175.

Nazwa zadania: Wypływ wody z naczynia.

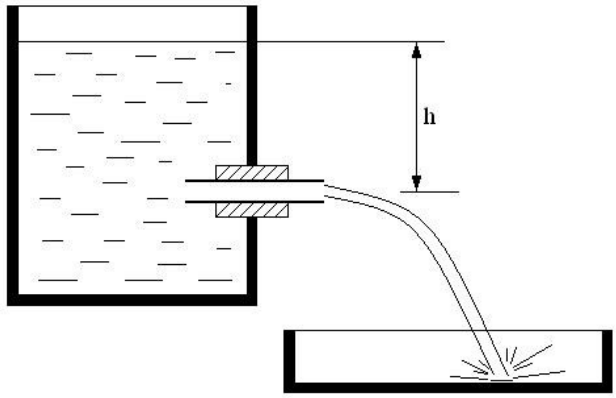
Działy: Mechanika płynów

Słowa kluczowe: wzór Torricellego, prędkość, wypływ, woda, siła, pęd, ciśnienie.

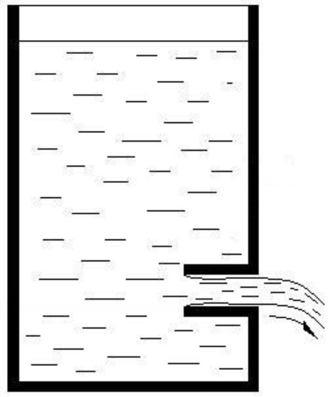
Zadanie doświadczalne – D2, **zawody I stopnia**, **XXXI OF**.

Prędkość wody wypływającej z rurki w układzie pokazanym na rysunku 1 z niezłą dokładnością wynosi

$$v = \sqrt{2gh}$$



Rys. 1



Rys. 2

Wydawać by się mogło, że objętość wody wypływającej z rurki w ciągu sekundy jest równa:

$$V = S \cdot v$$

gdzie S jest polem przekroju poprzecznego rurki. Okazuje się jednak, że objętość ta jest równa:

$$V' = S' \cdot v,$$

gdzie $S' < S$.

Wyznacz teoretycznie stosunek S'/S w wypadku, gdy koniec rurki w naczyniu nie znajduje się zbyt blisko dna, ścianek i powierzchni wody. Korzystając z dostępnych przyrządów spróbuj wyznaczyć ten stosunek doświadczalnie i porównaj go z wartością teoretyczną. W rozważaniach teoretycznych należy przyjąć, że woda jest cieczą nielepką i że ruch wody w rurce odbywa się w sposób laminarny.

Rozwiązanie

Zawarty w treści zadania wzór (podany przez Torricellego i nazwany jego imieniem)

$$v = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

(g – przyspieszenie ziemskie) określa prędkość wypływu cieczy przez otwór w cienkiej ściance naczynia przy zaniedbaniu lepkości. Wzór ten otrzymuje się z zasady zachowania energii: przyrównując energię kinetyczną wypływającej cieczy do zmiany energii potencjalnej związanej z obniżaniem się lustra cieczy w naczyniu.

Poza zasadą zachowania energii można jeszcze skorzystać z zasady zachowania pędu. Rozpatrzymy to dla wyidealizowanego przypadku przedstawionego na rysunku 2. Założymy mianowicie, że ciecz wypływająca z otworu znajdującego się w środku naczynia formuje strugę nie przylegającą do ścianek rurki.

Przy małym otworze wypływowym prędkość cieczy w pobliżu ścianek naczynia jest bardzo mała. Wobec tego ciśnienie działające na ścianki jest praktycznie takie samo, jak w przypadku statycznym. Znaczy to, że ciśnieniu hydrostatycznemu działającemu na każdy punkt ścianki bocznej zbiornika odpowiada równe mu ciśnienie działające na odpowiedni punkt ścianki przeciwległej.

Na fragment ścianki znajdujący się naprzeciw rury wypływowej działa siła parcia równa:

$$F = S\rho g h \tag{2}$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy. Wobec tego na poprzeczny przekrój strugi cieczy w otworze działa taka sama siła. Siła ta nadaje przyspieszenie wypływającej cieczy. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki powinno zachodzić

$$F = \frac{\Delta m\, v}{\Delta t} \tag{3}$$

gdzie Δm jest to masa cieczy wypływającej przez otwór w czasie Δt, v – prędkość wypływu.

W strudze zachodzi wzrost prędkości cieczy. Ze względu na ciągłość musi zatem nastąpić zmniejszenie pola poprzecznego przekroju strumienia cieczy - struga się zwęża. Oznaczmy pole przekroju strugi w miejscu, w którym przestaje się ona zwężać przez S'. Masa cieczy przepływającej w jednostce czasu przez przekrój S' (wydatek wypływającej cieczy) jest równa

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = S' \rho\, v$$

Wobec tego wzór (3) możemy przepisać w postaci

$$F = S' \rho\, v^2 \tag{4}$$

Na podstawie wzorów (1), (2) i (4) otrzymujemy:

$$S' = \frac{1}{2} S$$

Przy założeniu, że prędkość wody wypływającej z rurki spełnia wzór Torricellego, wystarczy mierzyć jedynie wysokość h, objętościową szybkość wypływu wody V' (np. posługując się menzurką i stoperem) oraz średnicę wewnętrzną rurki, skąd obliczamy S. Wartość interesującego nas stosunku S'/S, który oznaczamy przez μ obliczymy ze wzoru

$$\mu = \frac{u'}{S\sqrt{2gh}} \tag{5}$$

Przyjęliśmy powyżej, że zmiany wysokości h w trakcie pomiaru są niewielkie. Uwzględniając te zmiany stosując całkowanie i korzystając z wzoru wiążącego szybkość wypływu V' ze zmianami h oraz z polem podstawy Q walcowego naczynia. Wychodząc ze wzoru

$$Q\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = V' = S'\sqrt{2gh}$$

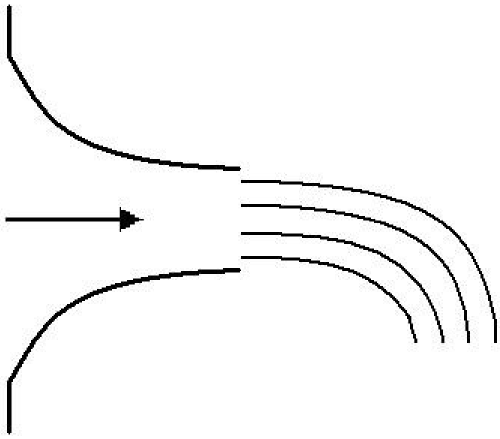
otrzymujemy po scałkowaniu zależność

$$\mu = \frac{\sqrt{2}Q\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right)}{\sqrt{g} \cdot S \cdot \Delta t}$$

gdzie Δt jest czasem, w którym zachodzi zmiana wysokości h od wartości h_1 do h_2.

W przykładowym doświadczeniu stwierdzono, że obliczony na podstawie wzoru (5) współczynnik μ wahał się w granicach od 0,76 do 0,54 w zależności od h, które było zmienne odpowiednio od 185 mm do 27 mm .

Dyskutując szerzej problem wypływu cieczy trzeba zaznaczyć, że wartość współczynnika μ zależy od wymiarów i kształtu rurki. Szczególnie jest to widoczne w przypadku rurek zwężających się (większe μ) bądź rozszerzających się (mniejsze μ). Najwyższą wartość zbliżoną do jedności, osiąga μ dla rurki o kształcie dyszy (rys. 3). Jest to zrozumiałe, gdyż powierzchnia przekroju wylotu dyszy S odpowiada dobrze w tym przypadku obliczonemu przez nas polu przekroju S' „zwężonej strugi".

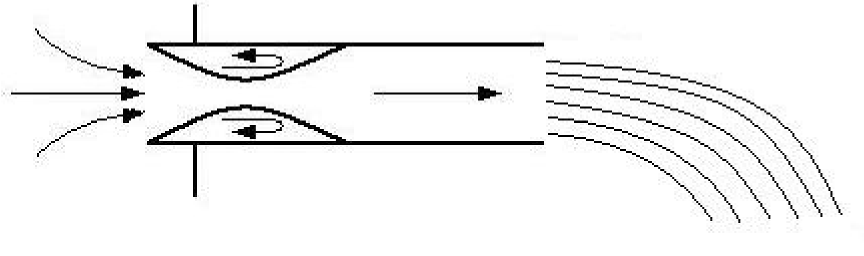


Rys. 3

Prędkość cieczy wypływającej z takiej dyszy jest praktycznie zgodna ze wzorem Torricellego. Natomiast w przypadku wypływu cieczy przez rurkę walcową (zwłaszcza o dużym stosunku długości do średnicy), wobec nieuniknionych turbulencji powstających w rurce (rys. 4) prędkość wypływającej cieczy v wyraża się wzorem

$$v = \varphi\sqrt{2gh}$$

gdzie φ jest współczynnikiem o wartości zbliżonej do zdefiniowanego powyżej współczynnika μ.



Rys. 4

Doświadczalna weryfikacja stosowalności wzoru Torricellego nie należała do zakresu zadania. Ewentualne stwierdzenie rozbieżności między doświadczalnie wyznaczoną (z zasięgu strumienia) prędkością v a wzorem Torricellego wbrew sugestii zawartej w sformułowaniu zadania (co było jego oczywistą wadą) było, jako wyraz naukowego krytycyzmu, zaliczane na plus zawodnikom.