XXX OLIMPIADA FIZYCZNA (1980/1981). Stopień II, zadanie teoretyczne – T3.

Źródło: Olimpiady Fizyczne XXIX i XXXI, WSiP Warszawa 1986

Autor: Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska

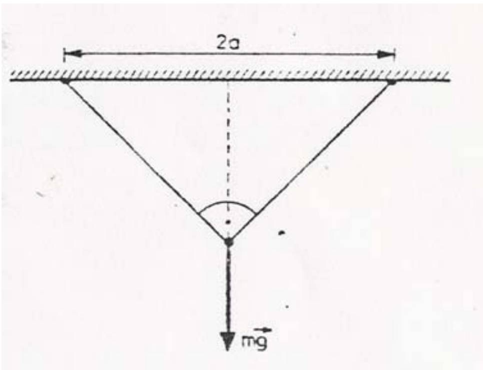
Nazwa zadania: Alpinista zawieszony pomiędzy skałami

Działy: Kinematyka

Słowa kluczowe: drgania, położenie równowagi, prawo Hooke’a

Zadanie teoretyczne – T3, zawody II stopnia, XXXOF.

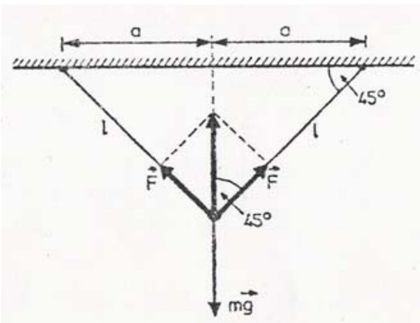
Na środku gumki o długości początkowej 2a zamocowanej na końcach (rys. 1) do nieruchomych zaczepów odległych o 2a zawieszono ciężarek. W stanie równowagi połówki gumki tworzą ze sobą kąt prosty (patrz rysunek). Wyznacz okres małych, pionowych drgań ciężarka po wytrąceniu go z opisanego położenia równowagi. Zakładamy, że gumka jest jednorodna, nieważka i że podlega prawu Hooke'a.



Rys. 1

Rozwiązanie

Niech stała sprężystości gumki wynosi *k*. Ze względu na założenie o jednorodności gumki, połowa gumki ma stałą sprężystości równą *2k.*
Po zawieszeniu ciężarka o masie m siła ciężkości *mg* zostaje zrównoważona przez siły sprężystości *F* obu połówek gumki i powoduje rozciąganie każdej z połówek gumki do długości $l = a\sqrt{2}$ (rys. 2). Wydłużenie każdej połówki gumki wynosi $a(\sqrt{2} - 1)$.



Rys. 2

Zatem z prawa Hooke'a

$$F = 2ka\left(\sqrt{2} - 1.\right) \tag{1}$$

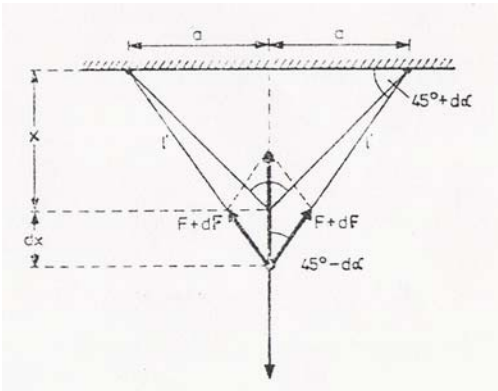
Korzystając z warunku równowagi

$$mg = 2F\cos 45^0,$$

otrzymamy stałą sprężystości gumki

$$k = \frac{mg}{a} \cdot \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \tag{2}$$

Przy wychyleniu ciężarka z położenia równowagi w kierunku pionowym o wielkość dx (rys. 3) następuje nie tylko zmiana napięcia gumki spowodowana zmianą jej wydłużenia, ale również zmiana kąta między połówkami gumek



Rys. 3

Z rysunku 3 wynika:

$$l' = \frac{a}{\cos(45^\circ + d\alpha)} = \frac{a}{\cos 45^\circ \cos d\alpha - \sin 45^\circ \sin d\alpha} \approx \frac{a\sqrt{2}}{1 - d\alpha} \approx a\sqrt{2}(1 + d\alpha),$$

a ponieważ

$$\frac{a + dx}{a} = tg 45^\circ + \alpha,$$

$$dx = a[tg(45^\circ + \alpha) - tg 45^\circ] \approx 2a\ d\alpha \tag{3}$$

Zmiana wydłużenia połówki gumki wynosi

$$dl = l' - l = \sqrt{2} \cdot a\ d\alpha,$$

a zmiana napięcia każdej połówki zgodnie z prawem Hooke'a

$$dF = 2k \cdot dl = 2k \cdot \sqrt{2}\ a\ d\alpha \tag{4}$$

Siła nadająca ruch ciężarkowi w kierunku pionowym po wychyleniu o kąt $d\alpha$ wynosi

$$dF_w = 2(F + dF)\cos(45^\circ - \alpha) - 2F\cos 45^\circ \approx \sqrt{2}(dF + F\ d\alpha).$$

Korzystając z poprzednio obliczonych wielkości (1), (4) otrzymamy.

$$dF_w = 2k \cdot a(4 - \sqrt{2})d\alpha.$$

Biorąc pod uwagę, że siła jest skierowana przeciwnie do wychylenia i podstawiając otrzymaną wartość k (2) i d_x (3) otrzymamy

$$dF_w = -\frac{mg}{a}\frac{4-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}dx. \tag{5}$$

Siła zawracająca jest więc proporcjonalna do wychylenia. Ciężarek będzie zatem wykonywać drgania harmoniczne.
Z teorii drgań harmonicznych wiadomo, że jeśli siła jest proporcjonalna do wychylenia $F = -C\ \Delta x$ to masa m wykonuje oscylacje o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}. \tag{6}$$

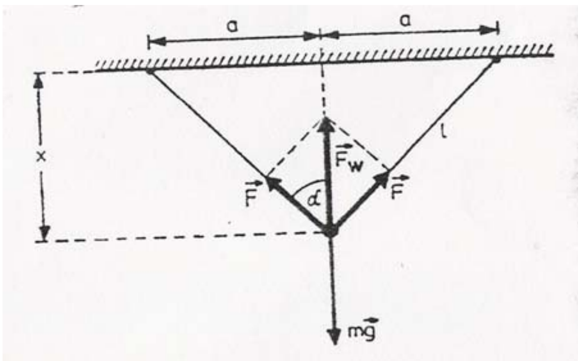
Z wzoru (5) wynika, że w rozważanym przypadku

$$C = \frac{mg}{a}\frac{4-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

a więc okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}\frac{4-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}}\ .$$

Drugi sposób rozwiązania



Rys. 4

Siła wypadkowa sił sprężystości w funkcji położenia x ciężarka o masie m (rys. 4) wynosi:

$$F_w = 2F\cdot\cos\alpha = 2F\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Ponieważ wydłużenie polowy gumki wynosi $l-a$, to siła napięcia F zgodnie z prawem Hooke'a jest:

$$F = 2k(l-a).$$

Uwzględniając zwrot siły F_w otrzymamy

$$F_w = -4k\left(x - \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}\right).$$

Małe wychylenie Δx od punktu równowagi wywoła pojawienie się siły ΔF_w

$$\Delta F_w = \left(\frac{dF_w}{dx} \Big|_{x=a} \right) \cdot \Delta x. \tag{7}$$

Obliczając pochodną po współrzędnej x i wartość tej pochodnej w punkcie równowagi tj. dla $x = a$

$$\frac{dF_w}{dx} \Big|_{x=a} = -2k \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}},$$

i uwzględniając obliczoną poprzednio wartość k (2) otrzymamy

$$\frac{dF_w}{dx} \Big|_{x=a} = -\frac{4 - \sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \frac{mg}{a}.$$

Wstawiając otrzymany wynik (8) do wzoru (7) obliczymy

$$dF_w = -\frac{mg}{a} \frac{4 - \sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} dx,$$

co jest identyczne z poprzednio otrzymanym wzorem (5).