XXX OLIMPIADA FIZYCZNA (1980/1981). Stopień II, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło: Olimpiady Fizyczne XXIX-XXXI, WSiP, Warszawa, 1986

Autor: Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska

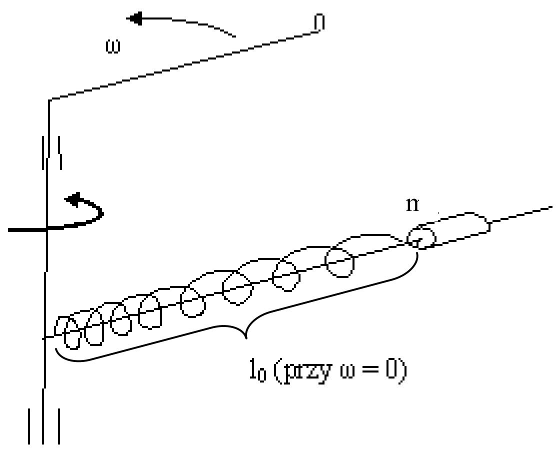
Nazwa zadania: Histereza

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: siła sprężystości, siła odśrodkowa, położenie równowagi, prędkość kątowa, prawo Hooke’a, histereza

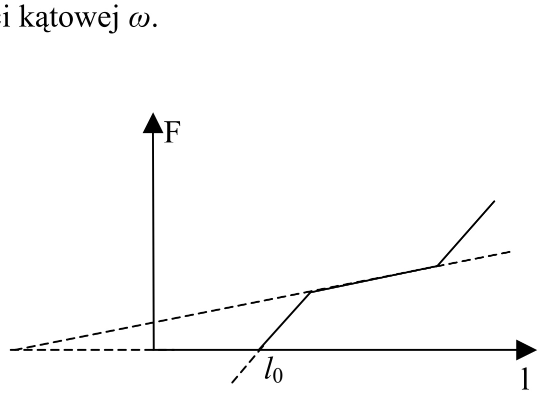
Zadanie teoretyczne – T1, zawody II stopnia, XXX OF.

Dany jest układ pokazany na rys.1. Na pręcie prostopadłym do osi obrotu nanizany



Rys. 1

jest ciężarek o masie *m.* Nienapięta sprężyna ma długość l_0. Zależność siły sprężystej F od długości l przedstawiono linią ciągłą na rysunku 2 (sprężyna nie podlega prawu Hooke'a). Przedyskutuj zachowanie się położenia równowagi ciężarka, mogącego poruszać się po pręcie przy zmianach prędkości kątowej ω.



Rys. 2

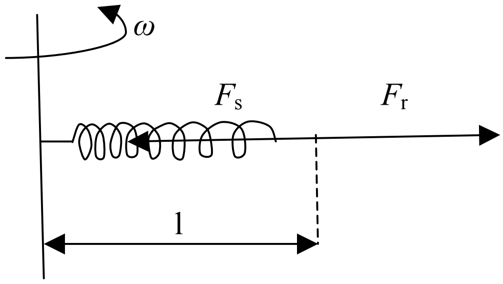
Wpływ tarcia, poza tym, że umożliwia osiągnięcie położenia równowagi należy zaniedbać.

Rozwiązanie

W układzie nieinercjalnym obracającym się wraz ze sprężyną ciężarek pozostaje w spoczynku. Działają na niego dwie siły: odśrodkowa $F_r = m\omega^2 l$ i sprężystości $F_s = F(l)$ dana przez wykres (rys. 2). Mają one ten sam kierunek i przeciwne zwroty. Warunkiem równowagi (rys. 3) jest, aby ich wartości były równe

$$F_s = F_r$$

czyli $F(l) = m\omega^2 l$



Rys. 3

Na wykresie (rys. 4) zależność siły F_r od l przedstawia prosta przechodząca przez początek układu o nachyleniu

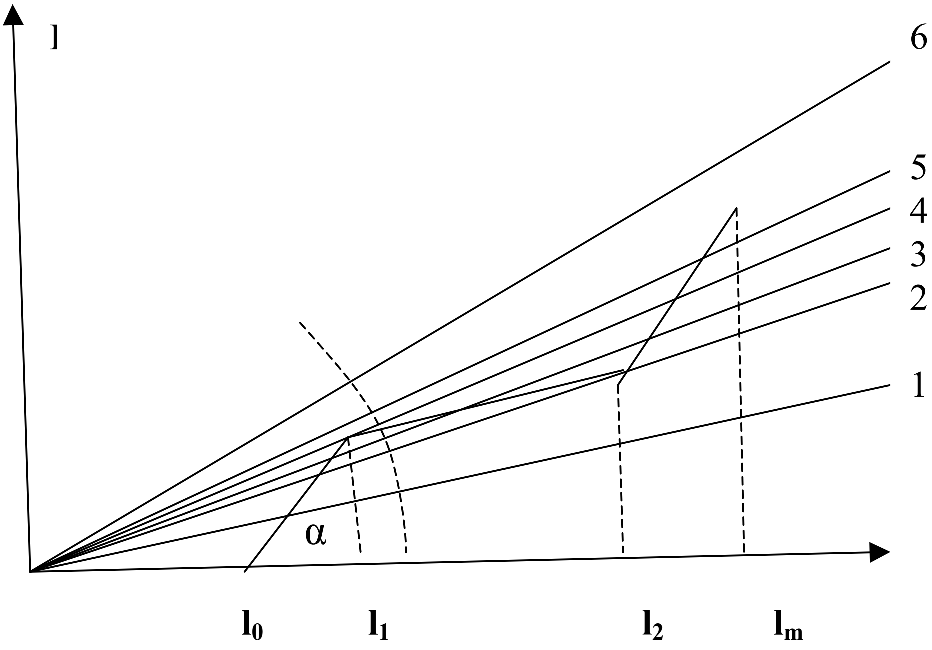
$$\operatorname{tg} \alpha = m\omega^2.$$

Punkty wspólne tej prostej z krzywą $F(l)$ wyznaczają stany równowagi układu. Zależnie od wartości prędkości kątowej ω istnieje więc jedno, dwa lub trzy położenia równowagi albo nie ma ich wcale.

Oznaczając na rysunku 4 wartości l_1 i l_2 oraz maksymalne wydłużenie sprężyny l_m (zakładamy, że zachowuje ona sprężystość aż do zerwania) otrzymujemy następujące przypadki:

1. $\omega < \sqrt{\dfrac{F(l_2)}{ml_2}}$ jedno położenie równowagi,
2. $\omega = \sqrt{\dfrac{F(l_2)}{ml_2}}$ dwa położenia równowagi,
3. $\sqrt{\dfrac{F(l_2)}{ml_2}} < \omega < \sqrt{\dfrac{F(l_1)}{ml_1}}$ trzy położenia równowagi,
4. $\omega = \sqrt{\dfrac{F(l_1)}{ml_1}}$ dwa położenia równowagi,
5. $\sqrt{\dfrac{F(l_1)}{ml_1}} < \omega < \sqrt{\dfrac{F(l_m)}{ml_m}}$ jedno położenie równowagi

6. $\omega > \sqrt{\dfrac{F(l_m)}{ml_m}}$ brak położeń równowagi.



Rys. 4

Dla ustalenia charakteru równowagi należy zbadać jak zachowuje się wypadkowa siła przy niewielkich odchyleniach od położenia równowagi. Jak widać z wykresu (rys. 4) w przedziałach $l_0 < l < l_1$ *oraz* $l_2 < l < l_m$ równowaga jest trwała, ponieważ przy zwiększaniu l siła sprężystości wzrasta szybciej niż siła odśrodkowa a przy zmniejszaniu l jest przeciwnie, co powoduje powrót do położenia równowagi. Na odcinku $l_1 \leq l \leq l_2$ wychylenie (w granicach odcinka) powoduje powstanie siły wypadkowej powiększającej to wychylenie, a więc równowaga jest nietrwała. Także równowaga dla $l = l_m$ jest nietrwała, gdyż niewielkie zwiększenie l powoduje zerwanie sprężyny. Wyniki można zebrać w tabeli 1.

Dotychczas otrzymane wyniki pozwalają przewidzieć zachowanie się położenia równowagi przy zmianach prędkości kątowej ω (zmiany te muszą być powolne, aby można było mówić o położeniu równowagi): zwiększając ω powodujemy ciągły wzrost l do wartości

$$l_1 \text{ przy } \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{F(l_1)}{ml_1}}$$

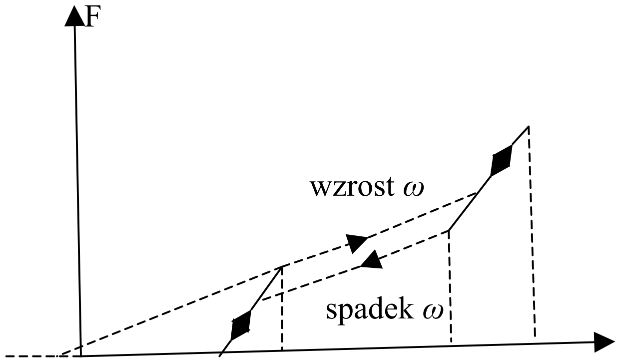
Przekraczając wartość $\omega = \omega_2$ powodujemy skokowy wzrost l do wartości powyżej l_2 (rys. 5). Dalszy wzrost ω powoduje ciągły wzrost l aż do wartości

$$l_m \text{ (dla } \omega = \omega_3 = \sqrt{\frac{F(l_m)}{ml_m}}\text{),}$$

przy której sprężyna zostanie zerwana. Jeżeli przed osiągnięciem tej wartości zaczniemy zmniejszać prędkość kątową, l będzie w sposób ciągły zmniejszać się do wartości l_2 (przy $\omega = \omega_1 = \sqrt{\dfrac{F(l_2)}{ml_2}}$), przy której nastąpi skokowe zmniejszenie l do wartości poniżej l_1

a następnie l będzie znowu malało w sposób ciągły (rys. 5). Zmiany te mają dwie szczególne cechy: omawiane już skoki wartości l oraz histerezę polegającą na tym, że l dla danej wartości ω zależy od drogi na jakiej wartość ta została osiągnięta.

Można zauważyć, że pole powierzchni ograniczone krzywą histerezy na rys. 5 reprezentuje pracę wykonaną nad układem przez siłę odśrodkową. Jest ona wykonywana kosztem energii urządzenia obracającego układ i zwiększa energię wewnętrzna układu w procesie tarcia.



Rys. 5

Tabela 1

	l_0		l_1		l_2		l_m	Razem t	Razem n
$\omega < \omega_1$		t						1	-
$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{F(l_2)}{ml_2}}$		t			n			1	1
$\omega_1 < \omega < \omega_2$		t		n		t		2	1
$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{F(l_1)}{ml_1}}$			n			t		1	1
$\omega_2 < \omega < \omega_3$						t		1	-
$\omega_3 = \sqrt{\dfrac{F(l_m)}{ml_m}}$							n	-	1
$\omega > \omega_m$								-	-

t – równowaga trwała, n – równowaga nietrwała